Capitolo 3

Numeri complessi

L'introduzione dei numeri complessi avvenne storicamente per la necessità di dare un senso ad alcune operazioni algebriche impossibili nell'insieme dei numeri reali, come ad esempio la radice quadrata di un numero negativo. In particolare svolsero un ruolo importante nella loro genesi i tentativi di risolvere le equazioni algebriche.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

con $p, q \in \mathbb{R}$. Semplici manipolazioni algebriche permettono di scrivere

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

da cui

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

ed infine

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Quanto scritto ha senso se il numero $\frac{p^2}{4} - q$ risulta non negativo, poiché in tal caso è lecito estrarne la radice quadrata.

Per dare un senso *formale* alla formula anche nel caso in cui $\frac{p^2}{4} - q$ sia negativo, diremo che la sua radice quadrata è un *numero immaginario* e la indicheremo con un simbolo prettamente algebrico (senza dargli nessun significato vero e proprio di numero). Poiché

$$\frac{p^2}{4} - q = (-1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

indicando $\sqrt{-1}$ con il simbolo i, scriveremo

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

così che le soluzioni dell'equazione assumono la forma

$$x = a \pm ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Il simbolo i è detto unità immaginaria e soddisfa formalmente alla relazione $i^2 = -1$.

La scrittura $a + ib$ viene detta *numero complesso*: a è detta la sua parte reale, b la sua parte immaginaria, essendo il coefficiente del numero immaginario i. Se $b = 0$ si ottiene un numero reale. Se $a = 0$, si ottiene invece un numero immaginario puro. Considerando $a+ib$ come "espressione polinomiale" nella variabile i, si ottiene la seguente regola formale per la somma di due numeri complessi

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Con la precauzione di sostituire i^2 con -1, si ottiene invece la seguente regola formale per il prodotto di due numeri complessi

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

3.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione introdurremo i primi concetti sui numeri complessi.

1. In base a quanto visto nella sezione precedente, poniamo la seguente definizione.

Definizione 3.1 (Numeri complessi). *Diciamo insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ la famiglia delle espressioni del tipo*

$$z = a + ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ su cui sono definite le seguenti operazioni:

(a) Somma: se $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$,

$$z_1 + z_2 := (a + c) + i(b + d);$$

(b) Prodotto: se $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$,

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Osservazione 3.2. Con un approccio più moderno, possiamo identificare un numero complesso $a + ib$ con la coppia ordinata (a, b) appartenente a $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3.3 (Parte reale e immaginaria). *Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, diremo che a è la parte reale, b la parte immaginaria di z e scriveremo*

$$a = Re(z) \qquad b = Im(z).$$

Chiaramente due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.

2. Si può verificare che le proprietà algebriche di somma e prodotto viste per i numeri reali valgono anche nel caso dei numeri complessi. $\mathbb{R}$ può essere visto come sottoinsieme di $\mathbb{C}$ considerando i numeri con $b = 0$, e le operazioni di somma e prodotto sopra introdotte si riducono su di essi a quelle usuali. Estenderemo dunque tutte le nozioni algebriche di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ usando le medesime notazioni. In particolare ha che 0 e 1 sono gli elementi neutri di somma e prodotto.

   Indicheremo con $-z$ l'opposto di z e con z^{-1} il suo inverso se $z \neq 0$. Le loro espressioni possono ottenersi manipolando l'espressione polinomiale $z = a + ib$. Per quanto riguarda l'opposto si ha
$$-z = -(a + ib) = -a - ib.$$
   Se $z = a + ib \neq 0$ (quindi con a o b non nulli) l'inverso è dato da
$$z^{-1} = (a + ib)^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib}\frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$
   Così se $z = 1 - 2i$ si ha
$$-z = -1 + 2i \qquad \text{e} \qquad z^{-1} = \frac{1 + 2i}{5}.$$

3. Introduciamo ora i concetti di modulo e di coniugato di un numero complesso.

Definizione 3.4 (Modulo e coniugato). *Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Diremo modulo o norma di z il numero non negativo*
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
Diremo coniugato di z il numero complesso
$$\bar{z} = a - ib.$$

Notiamo che se z è reale, allora il suo modulo coincide con la nozione ordinaria di modulo o valore assoluto di un numero reale; inoltre z coincide con il suo coniugato. Valgono le seguenti proprietà .

Proposizione 3.5. *Valgono i seguenti fatti per ogni $z, w \in \mathbb{C}$:*

(a) $z = 0$ *se solo se* $|z| = 0$;

(b) $|zw| = |z| \cdot |w|$;

(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

(d) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ *e* $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;

(e) $\bar{\bar{z}} = z$;

(f) $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ *e* $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$;

(g) $z = \bar{z}$ *se e solo se* $z \in \mathbb{R}$;

(h) $z\bar{z} = |z|^2$ *e dunque se* $z \neq 0$

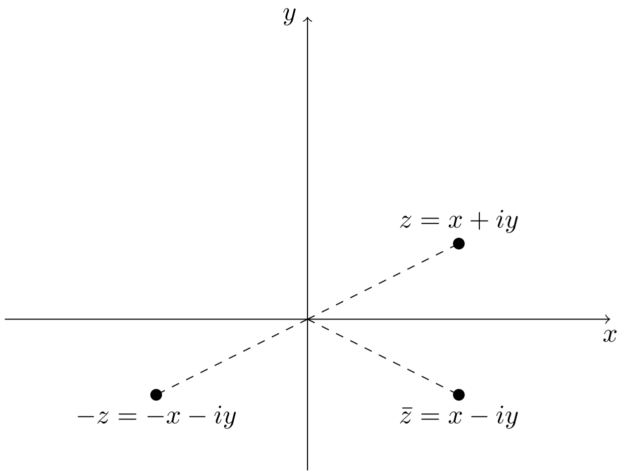
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Dimostrazione. Si tratta di proprietà di facile verifica. Quelle più complicate sono (b) e (c). Vediamo la (b): i conti per (c) sono simili. Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$: allora

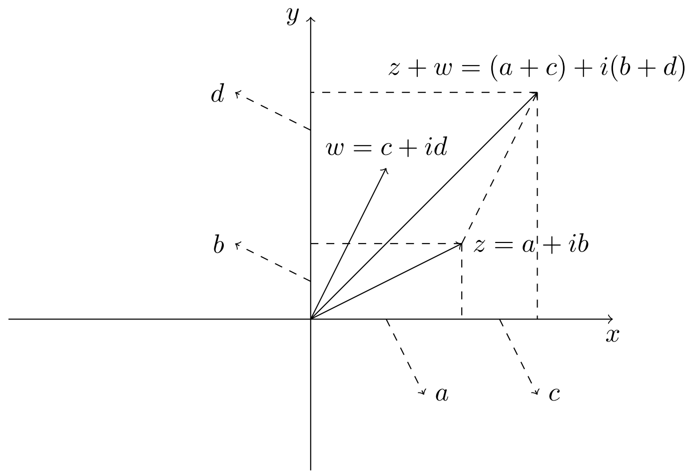
$$\begin{aligned} |z||w| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} &= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} \\ &= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = |zw| \end{aligned}$$

da cui si ha (b). ■

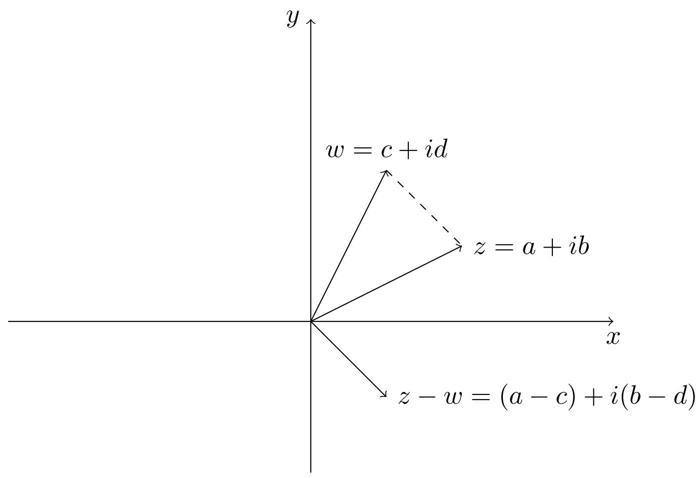
4. Diamo un'interpretazione geometrica alle nozioni sopra introdotte. Possiamo identificare un numero complesso con una coppia ordinata di $\mathbb{R}^2$. Pertanto se $z = x + iy$, possiamo pensare z come il punto del piano di coordinate (x, y). I numeri reali sono dunque i punti dell'asse delle x (perché $y = 0$), mentre gli immaginari puri sono i punti dell'asse delle y (perché $x = 0$).



L'opposto $-z = -x - iy$ è il punto del piano simmetrico di z rispetto all'origine. Il coniugato $\bar{z} = x - iy$ è il punto del piano simmetrico di z rispetto all'asse delle x. Risulta dunque chiaro geometricamente che gli unici numeri complessi che coincidono con il loro coniugato sono i numeri reali. Infine la norma $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza del punto z dall'origine. Dunque essa è nulla se e solo se z coincide con l'origine, cioè con il numero 0.



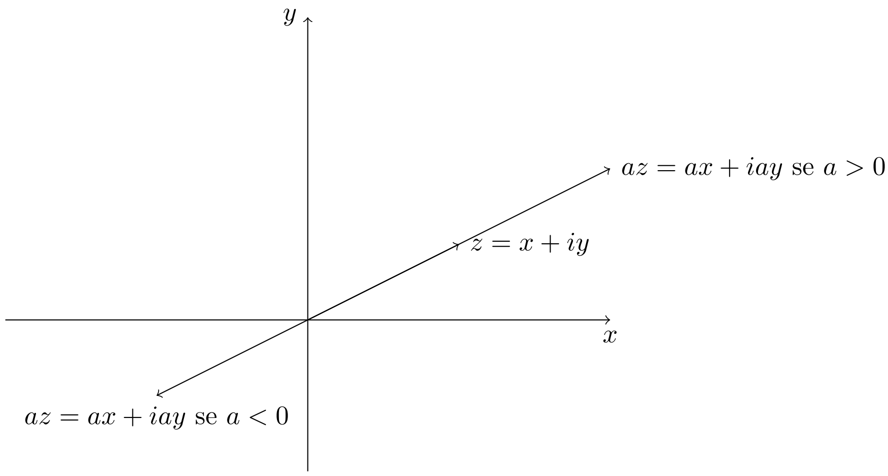
Per capire l'operazione di somma tra numeri complessi conviene vedere z come il vettore orientato di estremi 0 e z. Grazie a questa interpretazione, i numeri complessi si sommano con la usuale *regola della diagonale principale* dei vettori della fisica. Similmente la differenza segue la *regola della diagonale minore.*



Un'interpretazione geometrica completa del prodotto di numeri complessi sarà data nella prossima sezione. Limitiamoci al caso del prodotto tra un numero reale a ed un numero complesso $z = x + iy$. Si ha

$$az = ax + iay.$$

Notiamo che $|az| = |a||z|$ e che az appartiene alla retta passante per z e l'origine. Si ha dunque che il vettore az ha la stessa direzione di z, il suo modulo risulta modificato di un fattore $|a|$ (dunque si allunga se $|a| > 1$ e si accorcia se $|a| < 1$, rimane uguale se $|a| = 1$), ed il verso risulta concorde a quello di z se $a > 0$, discorde se $a < 0$.

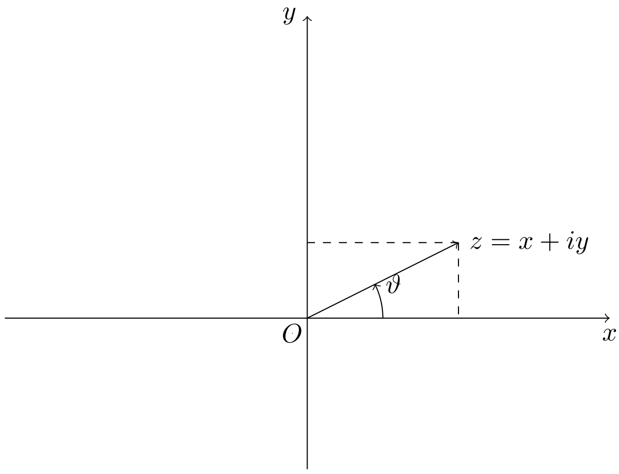


3.2 Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso

In questa sezione introdurremo la rappresentazione trigonometrica e quella esponenziale di un numero complesso: esse saranno utili per la risoluzione del problema dell'estrazione della radice n-esima di un numero complesso.

1. Consideriamo il numero $z = x + iy$ e pensiamolo (secondo definizione) come il punto $P = (x, y)$ del piano $\mathbb{R}^2$. Possiamo rappresentare P in termini della sua distanza ρ dall'origine e dell'inclinazione ϑ della retta OP.

   Essendo
$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta. \end{cases}$$
si ha
$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$
Tale scrittura è detta la **forma trigonometrica** del numero z. Chiaramente si ha
$$\rho = |z|$$
cioè ρ è il modulo di z. L'angolo ϑ è detto un **argomento** di z: esso non è univocamente determinato, poiché ogni $\vartheta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ svolge il medesimo ruolo. Poniamo
$$Arg(z) := \{\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$



e diciamo $Arg(z)$ l'insieme degli argomenti di z. L'argomento appartenente all'intervallo $]-\pi, \pi]$ viene detto **argomento principale** del numero z ed indicato con $arg(z)$. Notiamo che il numero $z = 0$ ammette ogni numero come argomento, cioè $Arg(0) = \mathbb{R}$.

Esempio 3.6. Se $z = 1 + i$, allora si ha $|z| = \sqrt{2}$ e

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Dunque $\frac{\pi}{4}$ è l'argomento principale di z. Altri argomenti sono ad esempio $\frac{9}{4}\pi$ o $-\frac{7}{4}\pi$.

Esempio 3.7. I numeri reali positivi hanno argomento principale nullo, quelli negativi hanno argomento principale pari a π. I numeri immaginari puri ib con $b > 0$ hanno argomento principale $\pi/2$, quelli con $b < 0$ hanno argomento principale $-\frac{\pi}{2}$. Ad esempio si ha

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Osservazione 3.8. L'uguaglianza tra numeri complessi può essere riformulata in termini di modulo ed argomento principale: *due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e lo stesso argomento principale.*

2. Vediamo come si scrive il prodotto di due numeri complessi usando la forma trigonometrica. Siano

$$z = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \qquad \text{e} \qquad w = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2).$$

Allora si ha

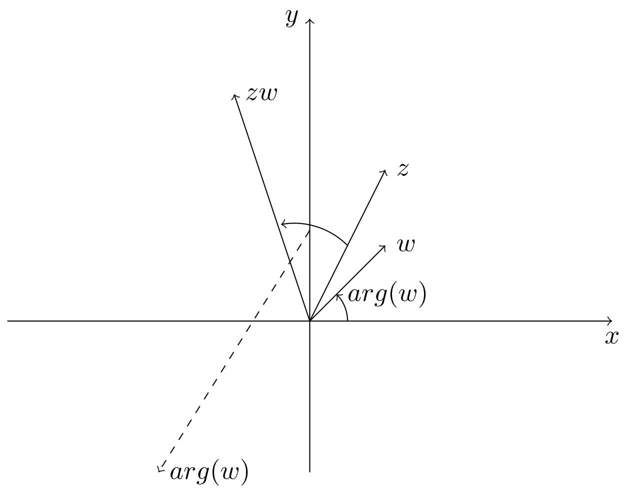
$$\begin{aligned}
zw = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) &= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \\
&= \rho_1\rho_2\left(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\right) \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)\right] \\
&= \rho_1\rho_2\left(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right).
\end{aligned}$$

Possiamo dunque enunciare il seguente risultato.

Proposizione 3.9. *Il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli dei fattori e per argomento la somma dei loro argomenti.*

Osservazione 3.10 (Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi). Grazie alla forma trigonometrica, possiamo fornire un'interpretazione geometrica del prodotto di due numeri complessi z, w. Abbiamo visto che

$$|zw| = |z||w| \qquad \text{e} \qquad arg(z) + arg(w) \in Arg(zw).$$



Dunque per ottenere zw è sufficiente ruotare z di un angolo $arg(w)$ e dilatarlo di un coefficiente $|w|$. Se $|w| = 1$, l'operazione si riduce ad una semplice rotazione: in particolare il prodotto per i genera una rotazione di $\pi/2$.

3. Vediamo come si comportano l'opposto, il coniugato e l'inverso di un numero complesso rispetto alla forma trigonometrica. Dato $A \subset \mathbb{R}$, poniamo

$$-A := \{-a : a \in A\} \qquad \text{e} \qquad A + \pi := \{a + \pi : a \in A\}.$$

Grazie alle interpretazioni geometriche della sezione precedente valgono le seguenti relazioni:

(a) $|-z| = |z|$ e $Arg(-z) = Arg(z) + \pi$;

(b) $|\bar{z}| = |z|$ e $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$;

(c) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ e $Arg(z^{-1}) = -Arg(z)$.

4. Vale il seguente risultato.

Proposizione 3.11 (Forma trigonometrica e potenze). *Sia $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $m \in \mathbb{Z}$. Allora si ha (richiediamo $z \neq 0$ se $m < 0$)*

$$z^m = \rho^m\left[\cos(m\vartheta) + i\sin(m\vartheta)\right].$$

Dunque per calcolare la potenza m-esima ($m \in \mathbb{Z}$) di un numero complesso (non nullo se $m < 0$) basta prendere la potenza m-esima del suo modulo e moltiplicarne per m l'argomento.

Dimostrazione. Come conseguenza della formula del prodotto, la forma trigonometrica della potenza z^m con $m \in \mathbb{N}$ è data da

$$z^m = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{m \text{ volte}} = \rho^m\left[\cos(m\vartheta) + i\sin(m\vartheta)\right].$$

Notiamo che la formula della potenza è corretta, nel caso $z \neq 0$, anche se $m < 0$: infatti si ha per $m = -k$ con $k \geq 0$, viste le proprietà dell'inverso,

$$\begin{aligned} z^m = z^{-k} = (z^{-1})^k = \left(\rho^{-1}[\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)]\right)^k &= \rho^{-k}[\cos(-k\vartheta) + i\sin(-k\vartheta)] \\ &= \rho^m\left[\cos(m\vartheta) + i\sin(m\vartheta)\right]. \end{aligned}$$

□

Esempio 3.12. Calcoliamo $(1+i)^8$: poiché il modulo di $(1+i)$ è $\sqrt{2}$ ed il suo argomento principale è $\pi/4$, si ha

$$(1+i)^8 = 16\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right) = 16.$$

Invece si ha

$$(1+i)^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{-3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{-3}{4}\pi\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

5. Le considerazioni precedenti mostrano che il prodotto di numeri complessi è associato alla somma dei loro argomenti: questo ricorda la proprietà delle potenze dei numeri reali

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Per sfruttare questa analogia, poniamo *formalmente* per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Il numero complesso $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ viene così ad assumere l'espressione

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

che è detta la **forma esponenziale** di z. Tramite questa rappresentazione, vengono naturali le formule

$$\rho_1 e^{i\vartheta_1} \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$
$$\left(\rho e^{i\vartheta}\right)^n = \rho^n e^{in\vartheta}$$

che non sono altro che i risultati precedenti riguardanti prodotti e potenze di numeri complessi.

Osservazione 3.13. Notiamo che

$$e^{i\pi} = -1.$$

Questa formula venne denominata da Eulero la *formula fondamentale dell'analisi matematica* poiché contiene i simboli fondamentali dell'analisi 1, e, π e i.

Esempio 3.14. Si ha

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La formula esponenziale del numero $-5i$ è invece

$$-5i = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

3.3 La radice n-esima di un numero complesso

In questa sezione ci occupiamo del problema dell'estrazione della radice n-esima di un numero complesso. Siano $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$: in analogia con il caso reale, un numero $w \in \mathbb{C}$ è una radice n-esima di z se

$$w^n = z.$$

Se $z = 0$, allora esiste una sola radice n-esima $w = 0$. Nel seguito consideriamo dunque $z \neq 0$.

1. Cerchiamo tutte le possibili radici di z usando la forma trigonometrica. Siano

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad \text{e} \qquad w = \eta(\cos\psi + i\sin\psi)$$

con $\rho \neq 0$. Allora l'uguaglianza $w^n = z$ porta a

$$\eta^n[\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)] = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

da cui

$$\begin{cases} \eta^n = \rho \\ n\psi = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La prima uguaglianza coinvolge numeri reali $\eta, \rho > 0$: possiamo dunque estrarre la radice n-esima usuale dei numeri reali ottenendo

$$\eta = \sqrt[n]{\rho}.$$

Passando agli argomenti si ha

$$\psi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Si ottengono dunque i numeri complessi della forma

$$w = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per contare quanti numeri complessi *effettivamente diversi* sono dati dalla formula precedente, dobbiamo evitare per gli argomenti i multipli di 2π: possiamo scegliere semplicemente $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ottenendo come argomenti

$$\psi_1 = \frac{\vartheta}{n}, \quad \psi_2 = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots\ldots, \psi_n = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Abbiamo dimostrato dunque il seguente risultato dovuto a De Moivre.

Proposizione 3.15 (Radici n-esime di un numero complesso). *Siano $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Se $z \neq 0$, allora z ammette esattamente n radici n-esime distinte. Detto $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, esse sono date dalla formula*

$$w = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Esempio 3.16. Le radici quadrate di $-1 = e^{i\pi}$ sono date da

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad \text{e} \qquad w_2 = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i.$$

Le radici quadrate (in senso complesso) di $1 = e^{i0}$ sono date da

$$w_1 = e^{i0} = 1 \qquad \text{e} \qquad w_2 = e^{i\pi} = -1.$$

Le radici cubiche di 1 sono date da

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Osservazione 3.17. Nel caso della radice quadrata, otteniamo che le soluzioni di $w^2 = z$ sono date da

$$w_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

e

$$w_2 = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right)\right] = -\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right) = -w_1.$$

Si ottengono allora i numeri $\pm w_1$, come c'era da aspettarsi essendo $(-w_1)^2 = w_1^2 = z$.

Se $z = x$ è un numero reale positivo, le radici quadrate complesse sono allora $\pm\sqrt{x}$, dove $\sqrt{x}$ è la radice quadrata dei numeri reali. Se $x < 0$, si hanno invece da $x = |x|e^{i\pi}$ le radici $\pm i\sqrt{|x|}$.

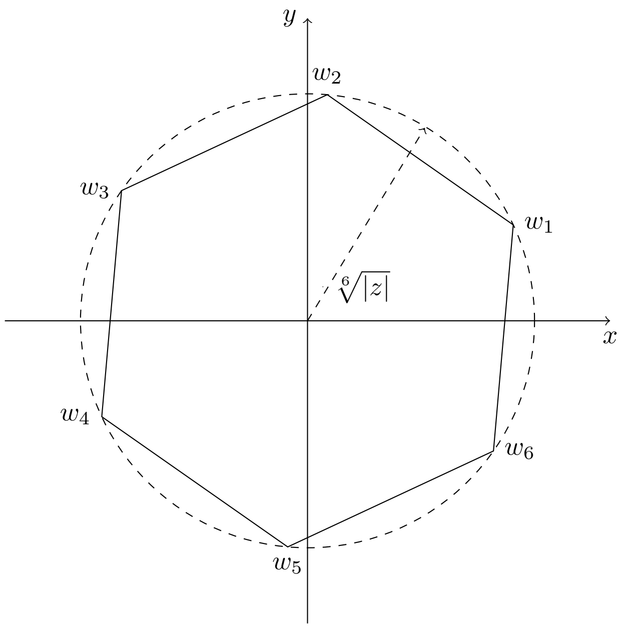
Osservazione 3.18 (Interpretazione geometrica). Sia

$$\sqrt[n]{z} = \{w_1, \dots, w_n\}$$

l'insieme delle radici n-esime di $z \neq 0$ date dalla Proposizione 3.15. Notiamo che

$$w_2 = w_1 e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad w_3 = w_2 e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad \dots \quad , w_n = w_{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Dunque, da un punto di vista geometrico, tutte le radici n-esime di ottengono a partire da w_1 operando rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{n}$. Concludiamo dunque che le radici n-esime di z si appartengono tutte alla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e si trovano nei vertici di un poligono regolare di n lati.



2. Come si è detto all'inizio del capitolo, l'introduzione di $\mathbb{C}$ fu motivata dalla necessità di dare un senso alle operazioni algebriche anche laddove la teoria dei numeri reali si arresta (ad esempio l'estrazione della radice quadrata di un numero negativo). Gran parte delle motivazioni venivano dallo studio delle equazioni algebriche, cioè dalla ricerca degli zeri di polinomi.

   La teoria dei polinomi di variabile reale si estende senza difficoltà al caso complesso. Possiamo parlare di polinomi $p(z)$ a coefficienti complessi di grado n: essi sono espressioni della forma
$$p(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$$
   con $c_i \in \mathbb{C}$, $c_0 \neq 0$. Ad esempio il polinomio
$$p(z) = iz^2 + (2 + 3i)z + 6$$
   è un polinomio di secondo grado. I polinomi reali sono particolari polinomi a coefficienti complessi: i loro coefficienti sono tutti reali e z varia solo sui numeri reali.

   La nozione di radice o zero di $p(z)$ è analoga a quella del caso reale: z_0 si dice una radice di $p(z)$ se $p(z_0) = 0$, cioè se la funzione polinomiale associata a $p(z)$ si annulla per $z = z_0$. Nel caso reale, alcuni polinomi non ammettono radici, ad esempio $p(x) = x^2 + 1$. Nel caso complesso ciò non accade, poiché vale il seguente risultato.

Teorema 3.19 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio $p(z)$ a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$.*

La dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra richiede strumenti avanzati, ed è pertanto omessa: la sua validità mostra però che l'insieme dei numeri complessi è l'estensione "corretta" di quello dei numeri reali avendo come obiettivo quello di poter risolvere i problemi algebrici.

Esercizi

1. Dare un'interpretazione geometrica dell'inverso di un numero complesso non nullo.
2. Sia $p(z)$ un polinomio di grado n a coefficienti complessi. Dimostrare che $p(z)$ può scriversi nella forma
$$p(z) = c_0(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}$$
con $c_0 \in \mathbb{C}$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
3. Sfruttando la Proposizione 3.11, scrivere $\cos(4\alpha)$ in termini di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$.
4. Sia $p(z)$ un polinomio a coefficienti reali. Dimostrare che se z_0 è radice di $p(z)$, anche $\bar{z}_0$ lo è .
5. Dimostrare che un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali può scriversi nella forma
$$p(x) = c_0(x - \gamma_1)^{n_1}(x - \gamma_2)^{n_2} \cdots (x - \gamma_h)^{n_h}[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{m_1} \cdots [(x - \alpha_k)2 + \beta_k^2]^{m_k}$$
dove $c_0, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $n_i, m_i \in \mathbb{N}$.
6. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definiamo l'esponenziale complesso di z tramite la formula
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$
Dimostrare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha $e^{z+w} = e^z e^w$.
7. Dato $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, poniamo
$$\mathcal{L}og(z) := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}.$$
$\mathcal{L}og(z)$ è l'insieme dei logaritmi di z in $\mathbb{C}$. Mostrare che $w = a + ib \in \mathcal{L}og(z)$ se e solo se
$$a = \ln|z| \qquad \text{e} \qquad b \in Arg(z).$$
8. Calcolare $\mathcal{L}og(i)$ e $\mathcal{L}og(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.
9. Mostrare che
$$\mathcal{L}og(zw) = \mathcal{L}og(z) + \mathcal{L}og(w) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}og(z^n) = n\mathcal{L}og(z), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$
dove $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ e $nA = \{na : a \in A\}$.
10. Sfruttando l'analogia con la formula $x^y = e^{y \ln x}$ per $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, poniamo per $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$
$$Pot_z(w) := \{e^\eta : \eta \in w\mathcal{L}og(z)\}$$
dove $w\mathcal{L}og(z)$ indica l'insieme dei numeri ottenuti facendo il prodotto di w per i logaritmi di z. Mostrare che
$$Pot_z(w_1 + w_2) = Pot_z(w_1)Pot_z(w_2) \qquad \text{e} \qquad Pot_{z_1}(w)Pot_{z_2}(w) = Pot_{z_1 z_2}(w)$$
con $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.

11. Calcolare $Pot_i(i)$ e $Pot_e(z)$.

12. Mostrare che per $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ si ha

$$Pot_z(w_1 w_2) \subseteq Pot_{Pot_z(w_1)}(w_2)$$

e che l'inclusione può essere stretta.