Capitolo 5

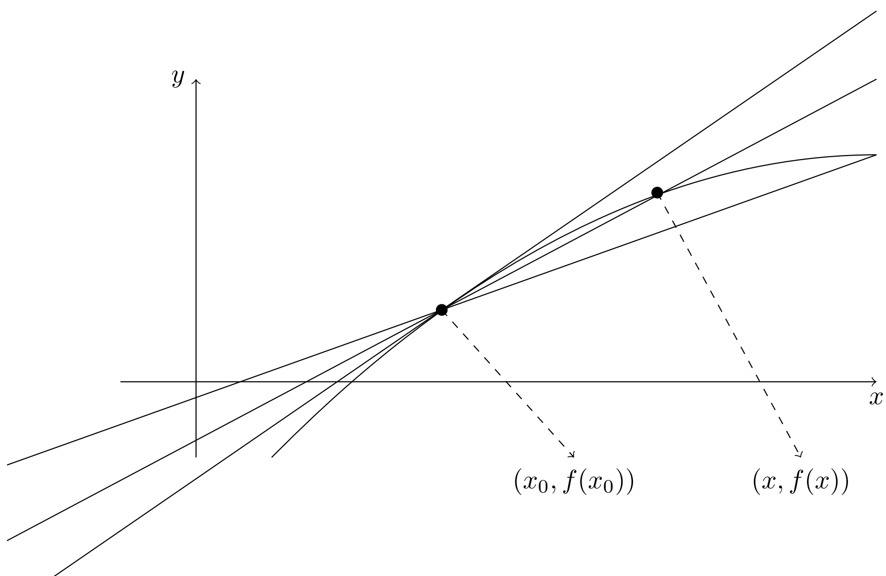
Derivate

In questo capitolo introdurremo la nozione di derivata di una funzione e ne studieremo le proprietà analitiche e geometriche.

5.1 Motivazioni

Descriviamo brevemente due problemi che sono di motivazione per l'introduzione del concetto di derivata di una funzione in un punto: il primo problema è di natura geometrica, mentre il secondo è di natura fisica.

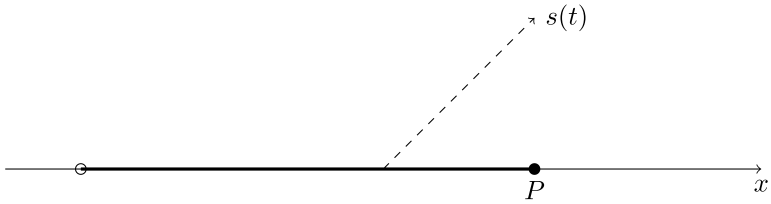
1. **La retta tangente al grafico di una funzione.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x_0 \in]a, b[$.



Consideriamo la retta r congiungente i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ sul grafico di f. Al tendere di x a x_0, tale retta si approssima sempre più alla retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. In particolare, il coefficiente angolare m della retta tangente si otterrà come limite del coefficiente angolare della retta r al tendere di x a x_0: dunque possiamo scrivere

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. **La velocità di un punto in movimento.** Consideriamo sulla retta reale un punto P in movimento. Sia $s(t)$ la sua posizione rispetto all'origine al tempo t.



Fissato il tempo t_0, la quantità

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

può essere interpretata come la velocità media del punto P sull'intervallo di tempo $[t_0, t]$. Se t tende a t_0, la velocità media approssimerà la *velocità istantanea* di P al tempo t_0: dunque possiamo scrivere

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

3. I due problemi sopra esposti, seppur di natura totalmente diversa, portano a considerare la quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

detta *rapporto incrementale di f in x_0*. In particolare, si è interessati al suo limite per $x \to x_0$.

5.2 Definizione di derivata e prime proprietà

1. Introduciamo la definizione precisa di derivata di una funzione in un punto.

Definizione 5.1 (Derivata in un punto). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Se esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

indichiamo tale valore con $f'(x_0)$ e lo diciamo la derivata prima di f in x_0. *Diciamo che f è* derivabile in x_0 *se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.*

Si usa anche la notazione

$$Df(x_0)$$

per indicare la derivata prima di f in x_0.

Ponendo $x - x_0 = h$, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e questa scrittura verrà spesso usata nel seguito.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.2 (Funzioni derivabili e derivata prima). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è derivabile su I se è derivabile in ogni punto di I. La funzione $f' : I \to \mathbb{R}$ è detta la funzione* derivata prima di f.

Notiamo che la definizione di derivabilità può essere estesa al caso in cui I sia unione di intervalli, intendendo che f sia derivabile su ognuno di essi.

2. Possiamo dunque formulare le seguenti interpretazioni della derivabilità .

Osservazione 5.3 (Interpretazione geometrica della derivabilità). In base a quanto detto nella sezione precedente, se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, la cui equazione è dunque

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

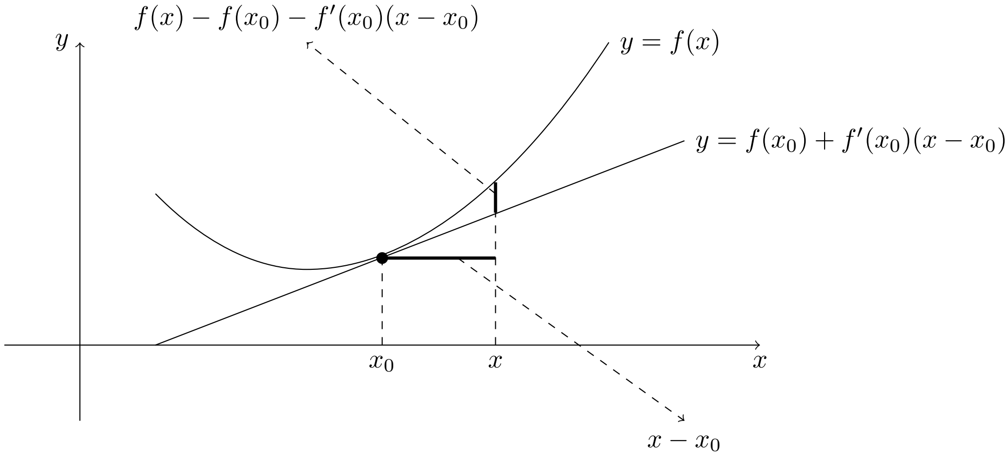
Notiamo inoltre che se f è derivabile in x_0, possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{5.1}$$

La relazione (5.1) implica che il grafico $y = f(x)$ di f è *ben approssimato da quello dalla retta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ vicino a x_0 a meno di errori infinitesimi di ordine maggiori di uno*, dal momento che lo scarto

$$r_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

risulta essere un infinitesimo di ordine maggiore di uno: graficamente per $x \to x_0$ la distanza tra i due grafici è dunque molto più piccola della distanza $x - x_0$.



Osservazione 5.4 (**Interpretazione analitica della derivabilità**)**.** Da un punto di vista analitico, se f è derivabile in x_0 possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x)$$

e la relazione (5.1) afferma dunque che *la formula analitica di f vicino a x_0 è approssimata tramite un polinomio di primo grado a meno di un errore infinitesimo di ordine maggiore di uno.*

3. La derivata seconda di una funzione è definita, se esiste, come la derivata di f'. In questo modo poi si definiscono le derivate di ordine superiore.

Definizione 5.5 (**Derivate di ordine superiore**)**.** *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è derivabile n-volte in x_0 se f è derivabile $(n-1)$-volte in I e se la sua derivata di ordine $(n-1)$ è derivabile in x_0.*

Useremo la notazione

$$f^{(n)}(x_0) \qquad \text{o} \qquad D^n f(x_0)$$

per indicare la derivata n-esima di f in x_0. Notiamo che la definizione di derivabilità di ordine n può essere estesa al caso in cui I sia unione di intervalli, intendendo che f sia derivabile all'ordine n su ognuno di essi.

4. Spendiamo due parole sulle notazioni per il calcolo delle derivate introdotte da Newton e Leibnitz, a cui si attribuisce l'invenzione del calcolo infinitesimale. Leibinitz usò per le derivate i simboli

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

La motivazione di tale notazione è di natura geometrica. Notiamo che detti $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$ gli incrementi che compaiono nel rapporto incrementale che definisce la derivata in un punto, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Leibnitz introdusse la notazione

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

pensando al fatto che per $x \to x_0$ gli incrementi $\Delta f(x_0)$ e Δx divenissero *infinitesimi*. Tale notazione è usata spesso in analisi matematica, anche perché rende molto intuitive delle regole di calcolo per le derivate. Alla scrittura viene dato però solo un valore formale, cioè non si pensa a $df(x_0)$ e dx come ad effettivi numeri evanescenti che risulterebbero difficili da definire.

Osservazione 5.6 (Differenziale). Notiamo che la formula precedente porta alla scrittura

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx.$$

La quantità $df(x_0)$ è detta il *differenziale* di f in x_0. In base a quanto detto sopra, essa è da considerarsi come l'incremento infinitesimo della funzione f (a partire dal valore $f(x_0)$) quando la variabile x passa da x_0 a $x_0 + dx$.

Il differenziale di f in x_0 è dunque dato dalla quantità $f'(x_0)\, dx$. Questa espressione è molto usata nelle applicazioni alla fisica e all'ingegneria.

Newton usò invece per le derivate i simboli

$$\dot{f}, \quad \ddot{f}, \quad \dddot{f}, \dots$$

usando cioè dei punti sopra la f in numero pari all'ordine della derivata in questione. Tale notazione è usata spesso dai fisici, soprattutto se la variabile indipendente ha il significato fisico di tempo.

5. Verifichiamo la derivabilità di due funzioni molto semplici: le funzioni costanti e la funzione identità . A partire da esse, ed usando le regole di derivazione che esporremo più avanti, si ricavano le derivate di molte altre funzioni elementari.

Lemma 5.7. *Le funzioni costanti sono derivabili e hanno derivata nulla. La funzione identica $f(x) = x$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1$.*

Dimostrazione. Sia $f(x) = c$ una funzione costante: si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Consideriamo la funzione identica: allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

■

6. Un'immediata ma importante conseguenza della derivabilità in un punto è la continuità della funzione nel punto in questione.

Teorema 5.8 (La derivabilità implica la continuità). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Per vedere la continuità di f in x_0, essendo x_0 d'accumulazione per I, basta vedere che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Essendo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_1(x)$$

con $r_1(x)$ infinitesimo di ordine maggiore di 1 in x_0, si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r_1(x)] = f(x_0),$$

da cui la tesi. ■

Osservazione 5.9 (La continuità non implica la derivabilità). Notiamo che l'implicazione inversa non è vera: ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$, ma non ammette derivata dal momento che il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

non esiste. Esistono anche funzioni continue su intervalli aperti che non sono derivabili in nessun punto: il primo esempio è dovuto a Weierstrass.

7. Analizziamo geometricamente le proprietà di alcuni punti notevoli di non derivabilità. A tal fine, occorre parlare di derivata destra e sinistra.

Definizione 5.10 (Derivate destre e sinistre). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. I limiti (se ben posti ed esistenti)*

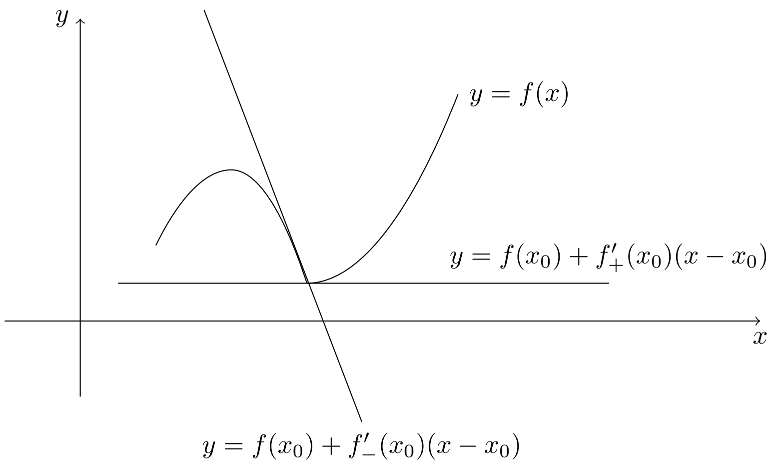
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

verranno detti le derivate destra e sinistra di f in x_0. *Esse si indicano con i simboli $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$. Se esse coincidono, allora f ammette derivata in x_0 ed il loro valore comune è la derivata di f in x_0.*

Una classe notevole di punti di non derivabilità è contenuta nella seguente definizione.

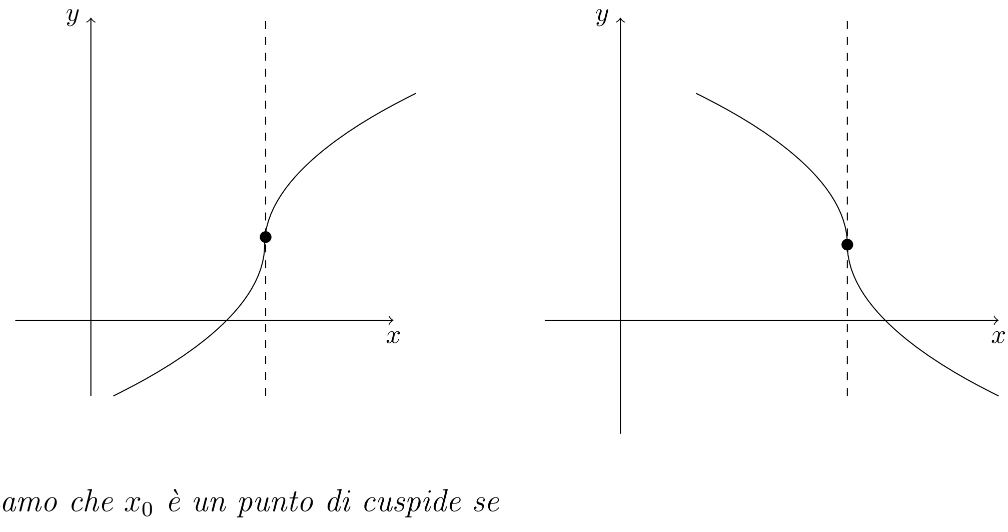
Definizione 5.11 (Punti notevoli di non derivabilità). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in I$.*

(a) Diciamo che x_0 è un punto angoloso per f se esistono le derivate destra e sinistra $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$, almeno una delle due appartiene a $\mathbb{R}$ e $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.



(b) Diciamo che x_0 è un punto a tangente verticale se

$$f'(x_0) = +\infty \qquad o \qquad f'(x_0) = -\infty.$$

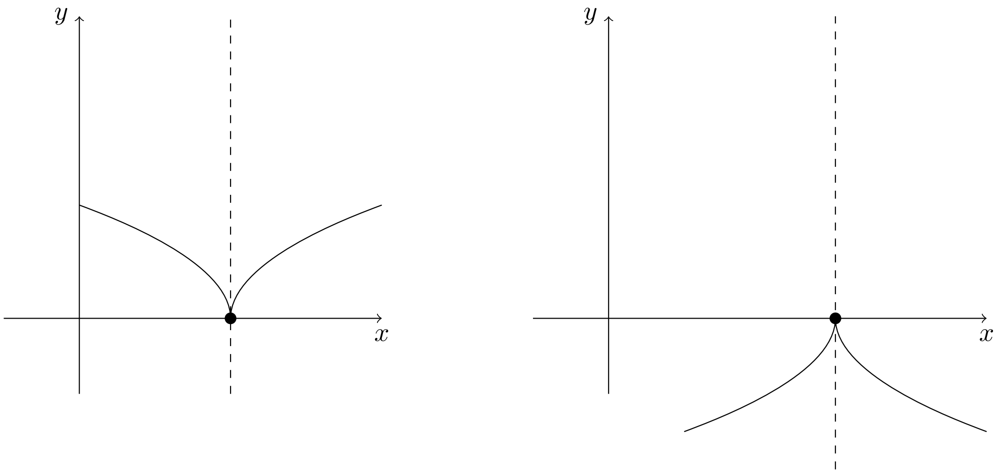


(c) Diciamo che x_0 è un punto di cuspide se

$$f'_+(x_0) = +\infty \qquad e \qquad f'_-(x_0) = -\infty$$

oppure

$$f'_-(x_0) = +\infty \qquad e \qquad f'_+(x_0) = -\infty.$$



Osservazione 5.12. Nel caso di un punto angoloso, il grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ ammette "due tangenti", una per il ramo a destra di x_0 di coefficiente angolare $f'_+(x_0)$ ed una per il ramo a sinistra di x_0 di coefficiente angolare $f'_-(x_0)$ (uno dei due potrebbe essere infinito, dunque la tangente al ramo risulta in questo caso verticale).

Osservazione 5.13. Esempi analitici tipici delle tre tipologie di punti sopra descritte sono le seguenti.

(a) La funzione $y = |x|$ presenta un punto angoloso in $x_0 = 0$.

(b) La funzione $y = \sqrt[3]{x}$ presenta un punto a tangente verticale in $x_0 = 0$.

(c) La funzione $y = \sqrt{|x|}$ presenta un punto di cuspide in $x_0 = 0$.

5.3 Regole di derivazione

In questa sezione ci occupiamo del rapporto tra l'operazione di derivata e le operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione ed inversa di funzioni.

1. Iniziamo con le operazioni di somma, prodotto e quoziente.

Teorema 5.14 (Derivata di somme, prodotti e quozienti). *Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0. Valgono i seguenti fatti.*

(a) La somma $f + g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) Il prodotto fg è derivabile in x_0 e si ha

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(c) *Sia $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora il quoziente f/g è derivabile in x_0 e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione.

(a) Consideriamo il rapporto incrementale di $(f+g)$ in x_0: si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Avendosi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \in \mathbb{R},$$

si ha per il teorema della somma dei limiti che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

così che la tesi è dimostrata.

(b) Il rapporto incrementale di fg in x_0 può riscriversi nella forma

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Prendendo il limite per $x \to x_0$, utilizzando le proprietà sulle somme e prodotti di limiti ed il fatto che g è continua in x_0 (dal momento che è derivabile in x_0) si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

che è la tesi.

(c) Notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].\end{aligned}$$

Mandando $x \to x_0$, utilizzando il fatto che g è continua in x_0 e che i limiti dei rapporti incrementali esistono, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

che è la tesi.

■

Osservazione 5.15. Notiamo due conseguenze importanti della derivazione di un prodotto.

(a) Se $c \in \mathbb{R}$ e f è derivabile in x_0 si ha

$$(cf)'(x_0) = (c'f + cf')(x_0) = cf'(x_0).$$

Dunque le costanti possono essere portate fuori dal segno di derivata.

(b) La derivata del prodotto di tre funzioni derivabili in x_0 può essere calcolata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}(fgh)'(x_0) &= [(fg)h]'(x_0) = (fg)'(x_0)h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0) \\ &= [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0) \\ &= f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0).\end{aligned}$$

Generalizzando, la derivata di una funzione prodotto $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$ con f_i derivabile in x_0 è data da

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \cdot f_n)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)\cdots f_n(x_0) &+ f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0)\cdots f_n(x_0) \\ &+ \cdots + f_1(x_0)f_2(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n'(x_0).\end{aligned}$$

2. Vediamo come si comporta la derivazione rispetto alla composizione di funzioni.

Teorema 5.16 (Derivata della funzione composta). *Siano I, J due intervalli in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(I) \subseteq J$. Sia $x_0 \in I$ e supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che g sia derivabile in $f(x_0)$. Allora la composizione $g \circ f$ è derivabile in x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Essendo g derivabile nel punto $f(x_0)$, possiamo scrivere (grazie all'interpretazione analitica della derivabilità) per ogni $z \in J$

$$g(z) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(z - f(x_0)) + r_1(z)$$

dove $r_1(z)$ è infinitesimo di ordine maggiore di uno in $z_0 = f(x_0)$. Notiamo che ponendo

$$e(z) = \begin{cases} \frac{r_1(z)}{z-f(x_0)} & \text{se } z \neq f(x_0) \\ 0 & \text{se } z = f(x_0) \end{cases}$$

si ha

$$r_1(z) = e(z)(z - f(x_0))$$

dove $e : J \to \mathbb{R}$ è continua con $e(f(x_0)) = 0$.

Possiamo dunque scrivere ponendo $z = f(x)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + e(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

da cui per $x \neq x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + e(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Prendendo il limite per $x \to x_0$ e tenendo conto che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ grazie alla continuità di f, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

così che la tesi è dimostrata. ■

3. Vediamo come si comporta la derivazione passando all'inversa di una funzione. Occupiamoci in prima battuta del rapporto tra continuità e passaggio alla funzione inversa. Vale innanzitutto il seguente risultato.

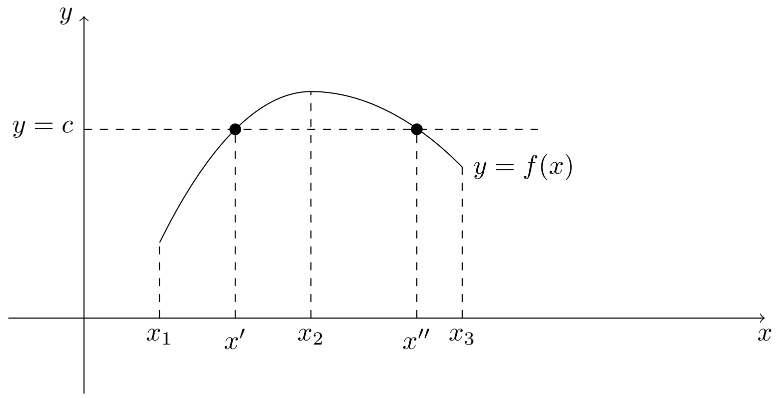
Teorema 5.17 (Continuità e invertibilità). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Allora f è strettamente monotona e $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è continua.*

Dimostrazione. Se f è continua e invertibile, essa deve essere necessariamente strettamente monotona. Infatti se per assurdo esistessero ad esempio $x_1 < x_2 < x_3$ con

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{e} \qquad f(x_2) > f(x_3),$$

detto

$$c \in \,]f(x_1), f(x_2)[\, \cap \,]f(x_3), f(x_2)[$$



allora per il teorema dei valori intermedi esisterebbero $x' \in]x_1, x_2[$ e $x'' \in]x_2, x_3[$ tali che

$$f(x') = f(x'') = c$$

contro l'invertibilità di f.

Vediamo la continuità della funzione inversa. Essendo f continua, allora per il teorema dei valori intermedi $J = f(I)$ è un intervallo. Inoltre, essendo f strettamente monotona, anche f^{-1} lo è . Supponiamo f (e dunque f^{-1}) monotona strettamente crescente. Sia $y_0 \in J = f(I)$ con $y_0 = f(x_0)$, cioè $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Trattiamo il caso in cui y_0 non sia un estremo di J (altrimenti il ragionamento è simile). Notiamo che

$$I = I_1 \cup \{x_0\} \cup I_2$$

dove $I_1 = I \cap]-\infty, x_0[$ e $I_2 = I \cap]x_0, +\infty[$ e similmente

$$J = J_1 \cup \{f(x_0)\} \cup J_2$$

dove $J_1 = J \cap]-\infty, y_0[$ e $J_2 = I \cap]y_0, +\infty[$. Chiaramente

$$f(I_1) = J_1 \qquad \text{e} \qquad f(I_2) = J_2.$$

Per il teorema sui limiti delle funzioni monotone si ha

$$\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = \inf_{J_2} f^{-1} = \inf I_2 = x_0$$

e similmente

$$\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = \sup_{J_1} f^{-1} = \sup I_1 = x_0,$$

da cui

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0 = f^{-1}(y_0).$$

■

Possiamo ora occuparci del rapporto tra derivabilità e passaggio alla funzione inversa.

Teorema 5.18 (Derivata della funzione inversa). *Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Sappiamo che $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua con $f(I)$ intervallo in $\mathbb{R}$: possiamo dunque indagarne la derivabilità in $y_0 = f(x_0)$. Sia $y \in]\inf_I f, \sup_I f[$: il rapporto incrementale

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

può scriversi nella forma ($f^{-1}(y_0) = x_0$)

$$\left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} \right)^{-1}.$$

Se $y \to y_0$, grazie alla continuità di f^{-1} si ha

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

e per il teorema di composizione dei limiti si ha ($f'(x_0) \neq 0$)

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

che è la tesi.

■

Osservazione 5.19. Il risultato precedente diviene intuitivo in base al seguente ragionamento geometrico.

Il grafico della funzione inversa non è altro che il grafico di f simmetrizzato rispetto alla bisetrice $y = x$. La retta tangente al grafico di f in (x_0, y_0) (come sopra $y_0 = f(x_0)$) è data da

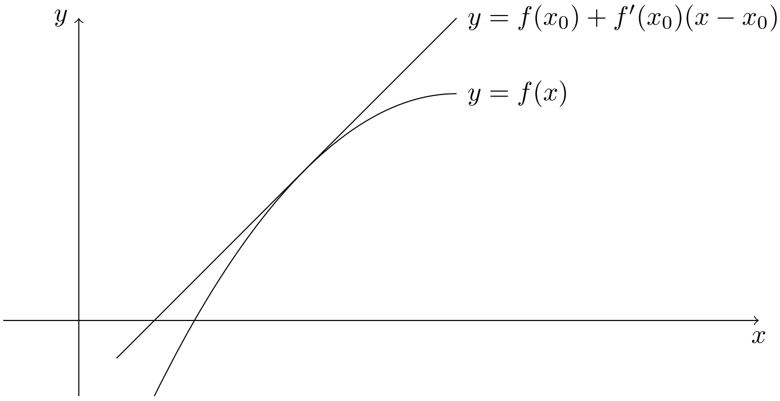
$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Scambiando x e y, otteniamo l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto (y_0, x_0) che è dunque

$$x = y_0 + f'(x_0)(y - x_0).$$

da cui

$$y = x_0 + \frac{1}{f'(x_0)}(x - y_0).$$



Concludiamo che
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
La condizione $f'(x_0) \neq 0$ acquista un chiaro significato geometrico: se fosse $f'(x_0) = 0$, la retta tangente al grafico di f sarebbe orizzontale e di conseguenza quella tangente al grafico di f^{-1} sarebbe verticale. In tal caso y_0 non può essere un punto di derivabilità di f^{-1}.

5.4 Derivate delle funzioni elementari

Grazie alle regole di derivazione viste nella sezione precedente, possiamo calcolare le derivate delle funzioni elementari e delle loro composizioni.

1. **Derivate di polinomi e funzioni razionali fratte.** Sappiamo che la funzione identità $x \mapsto x$ è derivabile con derivata pari a 1. Utilizzando la regola di derivazione del prodotto, vediamo subito che le funzioni potenza $x \mapsto x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$ sono derivabili e possiamo calcolarne la derivata. Basta notare infatti che
$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}}$$
ed applicare la regola della derivazione del prodotto per ricavare che
$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{5.3}$$
La derivata delle funzioni potenza e le regole di derivazione sopra viste permettono di concludere che i *polinomi* sono funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ con derivata prima pari ancora a un polinomio. Ad esempio
$$(x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3.$$
Grazie alla regola di derivazione di un quoziente ed al fatto che i polinomi sono funzioni derivabili, ricaviamo che anche le *funzioni razionali fratte* sono derivabili nel loro dominio

(unione di intervalli aperti) e che la loro derivata prima è ancora una funzione razionale fratta. Ad esempio si ha

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Osservazione 5.20. Notiamo che per $x \neq 0$ si ha

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

e dunque si ottiene la generalizzazione della (5.3) con l'esponente negativo: per ogni $m \in \mathbb{Z}$ (e $x \neq 0$ se m è negativo) si ha

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

2. **Derivate delle funzioni trigonometriche.** Iniziamo con la funzione seno. Si ha che la derivata in $x_0 \in \mathbb{R}$ è data da

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}.$$

Poiché si ha $\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0(\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}\right).\end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = 0.$$

Ricaviamo dunque che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0.$$

Essendo x_0 generico, ricaviamo che *la funzione seno è derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua derivata è la funzione coseno*:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Passiamo alla funzione coseno: poiché si ha

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

allora per composizione si ha che la funzione coseno è derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua derivata vale

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Dunque *la funzione coseno è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e la sua derivata è l'opposto della funzione seno*:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Grazie alla regola di derivazione di un quoziente, si ricava che la funzione tangente è derivabile sul suo dominio: si ha

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1.$$

Similmente si ragiona per la funzione cotangente.

3. **Derivate delle funzioni esponenziali e logaritmiche**. Consideriamo la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$. Allora se $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

Essendo x_0 generico, ricaviamo che *la funzione esponenziale è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e coincide con la sua derivata*:

$$(e^x)' = e^x.$$

Passiamo alla funzione logaritmo: se $x_0 > 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln x_0 + \ln(1 + \frac{h}{x_0}) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x_0})}{h} = \frac{1}{x_0}.$$

Essendo x_0 generico, ricaviamo che *la funzione logaritmo è derivabile su* $]0, +\infty[$ *e la sua derivata è la funzione reciproco*:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Notiamo che le derivate delle funzioni $x \mapsto a^x$ e $x \mapsto \log_a x$ si ricavano immediatamente: infatti dalla derivazione per composizione

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$$

e

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Infine ricaviamo subito la derivabilità delle funzioni seno e coseno iperbolico e le formule

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad \text{e} \qquad (\cosh x)' = \sinh x.$$

4. **Derivata della funzione potenza.** Notiamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ si ha

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Dalla derivazione per composizione si ha

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Dunque *la funzione potenza è derivabile su* $]0, +\infty[$ *e la sua derivata generalizza la derivata della potenza n-esima:*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

In particolare ad esempio la funzione radice quadrata è derivabile su $]0, +\infty[$ e

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5. **Derivate delle funzioni circolari inverse.** Occupiamoci ora delle funzioni circolari inverse.

   (a) **Le funzioni arcoseno e arcocoseno.** La funzione arcoseno

   $$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

   è la funzione inversa della funzione seno ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. La funzione seno è derivabile su $[-\pi/2, \pi/2]$ e la sua derivata è non nulla su $]-\pi/2, \pi/2[$ poiché

   $$(\sin x_0)' = \cos x_0 \neq 0 \qquad \text{per } x_0 \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

   Per tali valori possiamo dunque applicare il teorema della derivata della funzione inversa: la funzione inversa arcsin è derivabile in $y_0 = \sin x_0$ (notiamo che $y_0 \in]-1, 1[$) con

   $$(\arcsin y_0)' = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

   Nel conto di sopra abbiamo usato che $\cos x_0 > 0$, da cui $\cos x_0 = \sqrt{1 - \sin^2 x_0}$. Indicando come di consueto la variabile indipendente con x, abbiamo che *la funzione* arcsin *è derivabile su* $]-1, 1[$ *e*

   $$\forall x \in]-1, 1[: \ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

   In modo simile si ricava che la funzione arccos è derivabile su $]-1, 1[$ e

   $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) **La funzione arcotangente.** La funzione

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è la funzione inversa della funzione tan ristretta all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Notiamo che per $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(\tan x_0)' = 1 + \tan^2 x_0 > 0.$$

Possiamo dunque applicare sempre il teorema della derivata della funzione inversa: la funzione arctan è derivabile in $y_0 = \tan x_0$ con

$$(\arctan y_0)' = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Indicando come di consueto la variabile indipendente con x, abbiamo che *la funzione* arctan *è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6. Notiamo che l'insieme dei polinomi e delle funzioni razionali fratte sono *chiusi* rispetto alla derivazione, nel senso che l'operazione di derivazione produce ancora polinomi o funzioni razionali fratte. Si ottengono funzioni razionali fratte derivando anche la funzione logaritmo e la funzione arcotangente. Se diciamo funzioni *algebriche* quelle ottenute dai polinomi attraverso le operazioni di somma, prodotto, divisione ed estrazioni di radici (cioè per composizione di funzioni razionali fratte e di potenze razionali), allora è facile realizzare dai risultati precedenti che anche il loro insieme è chiuso per l'operazione di derivazione. Funzioni algebriche si ottengono anche derivando le funzioni inverse circolari.

7. Concludiamo con la seguente osservazione sull'opportunità in Analisi Matematica di misurare gli angoli in radianti e di utilizzare il numero di Nepero per esponenziali e logaritmi.

Osservazione 5.21 (Uso dei radianti e del numero di Nepero in Analisi Matematica). Notiamo che le formule

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{e} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

valgono per le funzioni seno e coseno con angolo misurato in *radianti*. Se adottassimo la misura in gradi sessagesimali, ed indicassimo con $\widetilde{\sin}$ e $\widetilde{\cos}$ le funzioni circolari associate, avremmo

$$\left(\widetilde{\sin} x\right)' = \left(\sin \frac{\pi x}{180}\right)' = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \frac{\pi}{180} \widetilde{\cos} x$$

e similmente

$$(\widetilde{\cos} x)' = -\frac{\pi}{180} \widetilde{\sin} x.$$

Dunque la funzione coseno non sarebbe più la derivata della funzione seno, comparendo un fattore $\frac{\pi}{180}$ nelle formule.

Le precedenti considerazioni mostrano dunque come in analisi matematica sia più *naturale* misurare gli angoli in radianti. Considerazioni simili portano a riconoscere come la funzione esponenziale e logaritmica in base e siano più *naturali* in analisi matematica rispetto a quelle in altre basi: infatti mentre

$$(e^x)' = e^x \qquad \text{e} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

si ha invece per basi diverse da e

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad \text{e} \qquad (\ln_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

5.5 Teoremi fondamentali sulle derivate

In questa sezione dimostreremo alcuni risultati fondamentali sulle derivate su cui si basano tutte le applicazioni geometriche ed analitiche del calcolo differenziale.

1. Il seguente risultato riguarda il comportamento della derivata in un punto di estremo locale. Diciamo che x_0 è un punto interno ad I se esiste $\varepsilon > 0$ con $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq I$.

Proposizione 5.22 (Teorema di Fermat). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto interno ad I in cui f è derivabile. Se x_0 è un estremo locale di f, allora si ha $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale. Essendo x_0 un punto di derivabilità interno a I, si ha

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Essendo $f(x) \geq f(x_0)$ per x vicino a x_0, possiamo scrivere

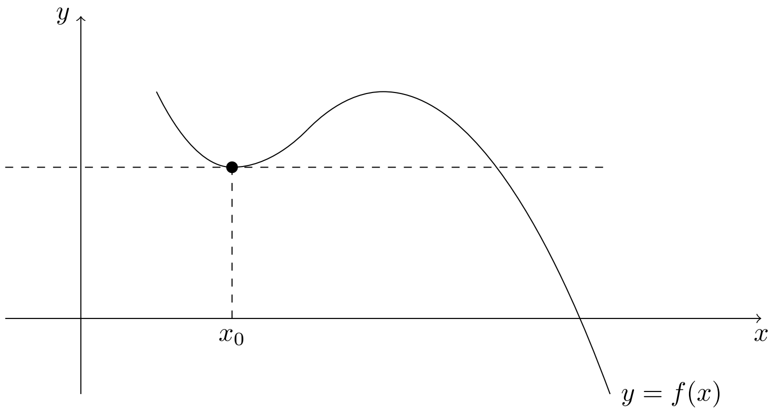
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

da cui deduciamo $f'(x_0) = 0$. ∎

Osservazione 5.23 (Interpretazione geometrica del Teorema di Fermat). Il Teorema di Fermat ammette una semplice interpretazione geometrica che ne rende intuitivo il risultato. In un punto di estremo locale x_0 interno all'intervallo di definizione in cui f è derivabile, la tangente al suo grafico è orizzontale. Dunque il coefficiente angolare della retta è zero e quindi $f'(x_0) = 0$.



Osservazione 5.24. Se x_0 di massimo o minimo locale fosse anche un estremo dell'intervallo I, allora la derivata soddisfa condizioni sul suo segno, ma in generale non è zero. Possiamo dire che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora valgono i seguenti fatti.

(a) Se $x_0 = a$ è minimo locale, si ha

$$f'(a) = f'_+(a) \geq 0,$$

mentre se è massimo locale

$$f'(a) = f'_+(a) \leq 0.$$

(b) Similmente, se $x_0 = b$ è minimo locale si ha

$$f'(b) = f'_-(b) \leq 0,$$

mentre se è massimo locale

$$f'(b) = f'_-(b) \geq 0.$$

Osservazione 5.25. L'ipotesi di derivabilità di f in x_0 è essenziale: ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ ammette in $x_0 = 0$ un punto di minimo assoluto, ma $f'(0)$ non esiste.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.26 (Punti critici o stazionari). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che $x_0 \in I$ è un* punto critico *o un* punto stazionario *di f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.*

Osservazione 5.27. Possiamo dunque dire che gli estremi locali interni all'intervallo di definizione di una funzione derivabile vanno cercati *fra* gli zeri di f', cioè nell'insieme dei suoi punti critici. Non tutti i punti critici sono in generale punti di estremo locale: ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ ammette $x = 0$ come punto critico, ma esso non è evidentemente né un massimo né un minimo.

2. Un'immediata conseguenza della proposizione precedente è il seguente risultato dovuto a Rolle.

Teorema 5.28 (Teorema di Rolle). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile $]a, b[$ tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

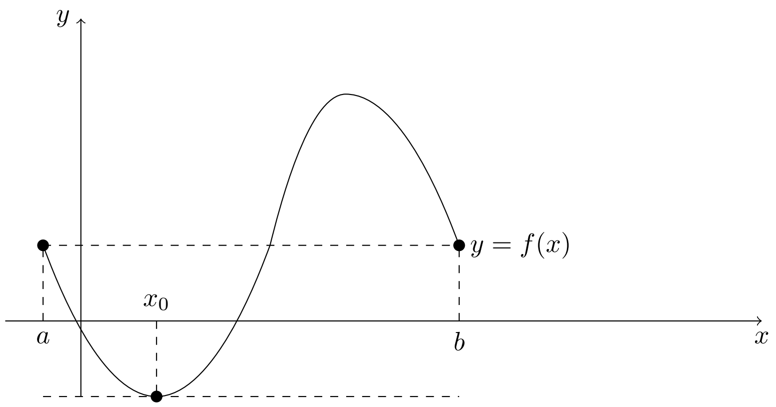
Dimostrazione. Distinguiamo due casi.

(a) Sia f costante su $[a, b]$: allora la sua derivata su $]a, b[$ è nulla e il teorema è dunque dimostrato, potendosi scegliere come x_0 un qualsiasi elemento di $]a, b[$.

(b) Supponiamo che f non sia costante su $[a, b]$. Per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[a, b]$ ed essendo $f(a) = f(b)$, ricaviamo che almeno un punto di estremo, chiamiamolo x_0, deve trovarsi in $]a, b[$. Grazie al Teorema di Fermat (essendo f derivabile) si ha $f'(x_0) = 0$: la dimostrazione è dunque conclusa.

■

Osservazione 5.29 (Interpretazione geometrica del Teorema di Rolle). Il Teorema di Rolle ammette una semplice interpretazione geometrica che ne rende intuitivo il risultato. Essendo $f(a) = f(b)$, se la funzione non è costante ammette un punto di massimo o di minimo interni a $[a, b]$: in tali punti la tangente al grafico è orizzontale, cioè la derivata prima si annulla.



3. Una conseguenza del teorema precedente è il seguente risultato dovuto a Cauchy.

Teorema 5.30 (Teorema di Cauchy). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$ tali che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Notiamo che non può essere $g(a) = g(b)$: infatti se così fosse, per il Teorema di Rolle esisterebbe $x' \in]a, b[$ con $g'(x') = 0$, contro l'ipotesi su g'. Consideriamo la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Notiamo che h è continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$ e tale che $h(a) = h(b)$ essendo

$$f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b).$$

Per il teorema di Rolle esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $h'(x_0) = 0$, cioè tale che

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0,$$

da cui la tesi. ∎

Osservazione 5.31. Il teorema di Cauchy è detto anche *teorema degli accrescimenti finiti*: infatti esso afferma che il rapporto tra gli *accrescimenti finiti* $f(b) - f(a)$ e $g(b) - g(a)$ delle funzioni f e g sull'intervallo $[a, b]$ uguaglia il rapporto tra le derivate f' e g' in un opportuno punto intermedio.

4. Una conseguenza importante del teorema di Cauchy è data dal seguente risultato.

Teorema 5.32 (Teorema di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Cauchy alle funzioni f e $g(x) = x$ per ottenere l'esistenza di $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la tesi. ∎

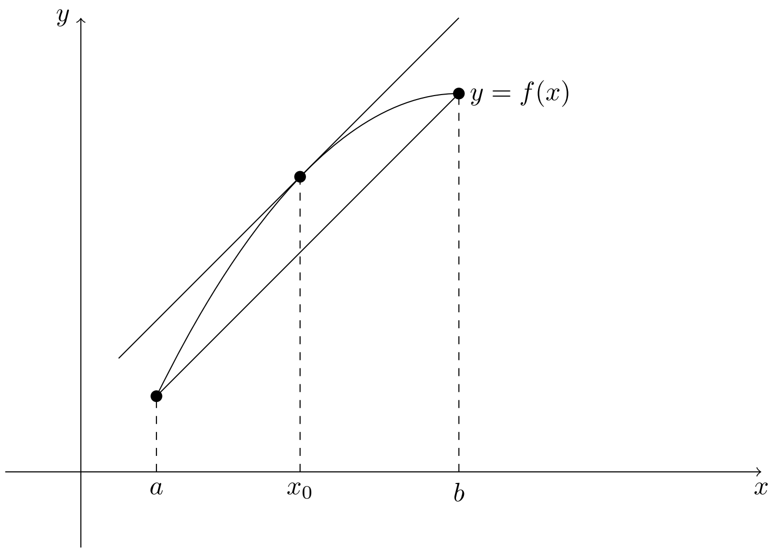
Osservazione 5.33 (Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange). Il Teorema di Lagrange ammette una semplice interpretazione geometrica che ne rende intuitivo il risultato. Disegnando il grafico di f, è evidente che esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo in cui la retta tangente risulta parallela alla retta che congiunge gli estremi del grafico. Essendo tali punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, il coefficiente angolare della retta che li congiunge risulta pari a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Concludiamo dunque che deve essere

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

cioè x_0 è proprio il punto di cui parla il Teorema di Lagrange.



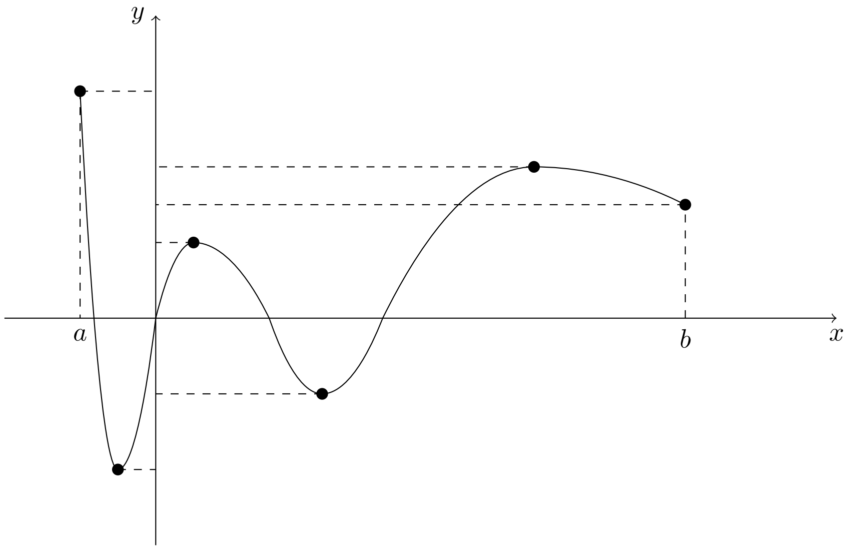
5.6 Alcune conseguenze dei teoremi fondamentali

In questa sezione stabiliremo alcune conseguenze dei teoremi fondamentali sulle derivate che hanno una grande importanza per lo studio delle proprietà analitiche e geometriche delle funzioni.

1. Iniziamo con delle semplici osservazioni sul calcolo del massimo e del minimo di una funzione definita su un intervallo. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[a, b]$. I punti di estremo possono trovarsi in $]a, b[$ oppure coincidere con gli estremi dell'intervallo. Se si trovano in $]a, b[$, grazie al Teorema di Fermat, essi devono essere punti critici di f, cioè soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. La determinazione del massimo e del minimo di f si può svolgere dunque nel seguente modo:

   (a) si determinano i punti critici $x_1, x_2, \dots$ di f in $]a, b[$, cioè si risolve $f'(x) = 0$ in $]a, b[$;

(b) si confrontano i valori $f(a)$ e $f(b)$ con i valori di f nei punti critici, cioè $f(x_1), f(x_2), \ldots$: il più grande è il valore di massimo, il più piccolo è il valore di minimo, i punti corrispondenti sono i punti di estremo cercati.



Esempio 5.34. Consideriamo ad esempio la funzione $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Poiché

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

si ha che i punti critici di f sono dati da $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. I valori corrispondenti sono $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$. Invece $f(-3) = -17$ e $f(2) = 3$. Dunque il minimo di f è -17 assunto in $x = -3$, mentre il massimo è 3 assunto nei punti -1 e 2.

Se f è definita su intervalli aperti o illimitati, i limiti di f agli estremi possono dare indicazioni sul sup o l'inf di f.

Esempio 5.35. Consideriamo la funzione precedente $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sull'intervallo $[-3, +\infty[$. Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si ha

$$\min_{[-3,+\infty[} f = -17 \qquad \sup_{[-3,+\infty[} f = +\infty$$

e -3 è un punto di minimo.

2. Analizziamo ora il rapporto tra monotonia e segno della derivata.

Proposizione 5.36 (Segno della derivata e monotonia). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f è crescente su I se e solo se $f' \geq 0$ su I. Similmente f è decrescente su I se e solo se $f' \leq 0$ su I.*

Dimostrazione. Vediamo la prima equivalenza. Supponiamo che f sia crescente su I. Allora per ogni $x_0 \in I$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

cioè f' è non negativa.

Viceversa supponiamo che $f' \geq 0$ su I: per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha grazie al teorema di Lagrange

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

con $x_0 \in]x_1, x_2[$ punto opportuno. Essendo $f'(x_0) \geq 0$, si ricava

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

cioè

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Dunque f è crescente e la dimostrazione è conclusa. ∎

Osservazione 5.37. Notiamo che gli argomenti precedenti mostrano che se f' non si annulla mai su I, allora f è strettamente monotona su I. La stretta monotonia non implica però che la derivata sia strettamente positiva o negativa: basta considerare il caso di $f(x) = x^3$ strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ma con $f'(0) = 0$.

3. Vediamo ora invece il rapporto tra convessità /concavità di una funzione ed il segno della derivata seconda. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.38 (Funzioni convesse e concave). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione.*

(a) Diciamo che f è convessa *su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e $t \in [0, 1]$ si ha*

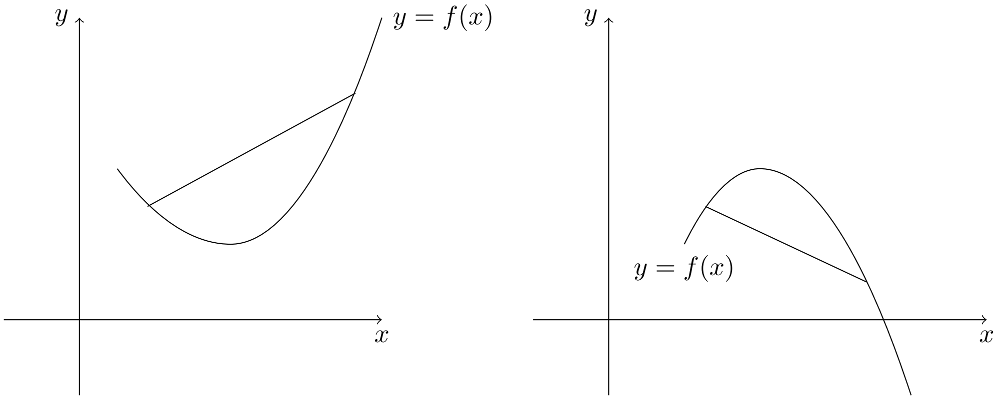
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

(b) Diciamo che f è concava *su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e $t \in [0, 1]$ si ha*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Osservazione 5.39. Se le disuguaglianze valgono in senso stretto, f è detta strettamente convessa o strettamente concava.

Osservazione 5.40 (Interpretazione geometrica di concavità e convessità). Possiamo interpretare geometricamente le nozioni di convessità e concavità di una funzione nel seguente modo: f è convessa se e solo se il segmento che congiunge due punti del suo grafico si trova sempre sopra il grafico di f; similmente f è concava se e solo se il segmento che congiunge due punti del suo grafico si trova sempre sotto il grafico di f.



Basta infatti notare che la retta r che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha equazione
$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
e che la quantità
$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
rappresenta la quota della retta r relativa al punto di ascissa
$$(1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
intermedio tra x_1 e x_2: infatti
$$\begin{aligned} f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}((1-t)x_1 + tx_2 - x_1) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}t(x_2 - x_1) \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \end{aligned}$$

Vale il seguente risultato.

Proposizione 5.41 (Segno della derivata seconda e convessità /concavità di una funzione). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è derivabile su I allora*

(a) f è convessa su I se e solo se f' è monotona crescente su I;

(b) f è concava su I se e solo se f' è monotona decrescente su I.

Se f è derivabile due volte su I, allora

(c) f è convessa su I se e solo se $f'' \geq 0$ su I;

(d) f è concava su I se e solo se $f'' \leq 0$ su I.

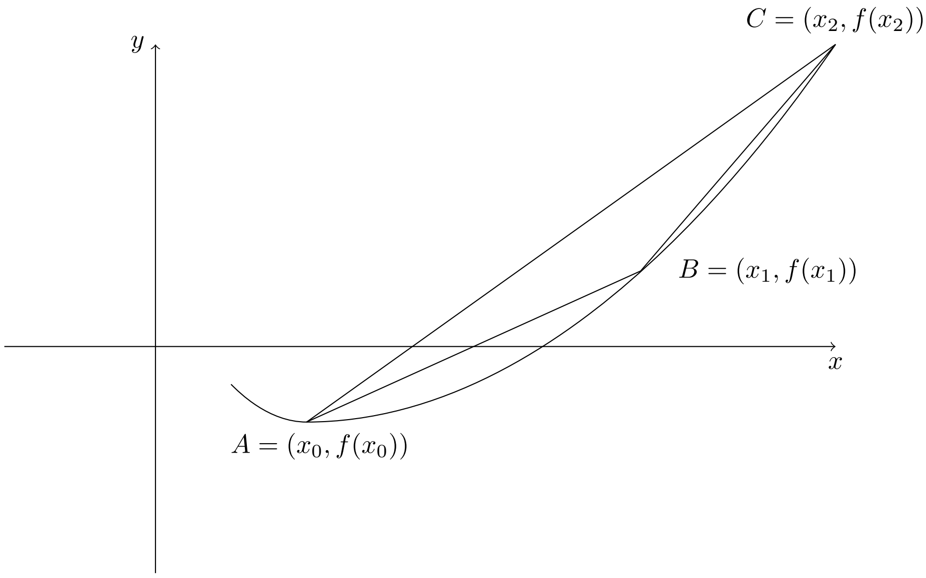
Dimostrazione. I punti (c) e (d) sono conseguenze immediate di (a) e (b). Vediamo ad esempio il punto (a).

L'analisi del grafico di $f : I \to \mathbb{R}$ mostra che essa è convessa su I se e solo se vale la seguente proprietà : detti

$$A = (x_0, f(x_0)) \qquad B = (x_1, f(x_1)) \qquad C = (x_2, f(x_2))$$

con $x_0 < x_1 < x_2$, allora si ha, indicando con m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} i coefficienti angolari delle rette corrispondenti, si ha

$$m_{AB} \leq m_{BC}.$$



Per concludere, dobbiamo dunque vedere che tale disuguaglianza tra coefficienti angolari è equivalente alla monotonia crescente di f'.

(a) Supponiamo che f sia derivabile su I e convessa. Facendo tendere B ad A e C nella disuguaglianza

$$m_{AB} \leq m_{BC}.$$

troviamo che

$$f'(x_0) \leq m_{AC} \leq f'(x_2).$$

Essendo x_0, x_2 arbitrari, deduciamo che f' è monotona crescente su I.

(b) Viceversa, sia f' monotona crescente su I. Allora si ha per il Teorema di Lagrange

$$m_{AB} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x') \quad \text{e} \quad m_{BC} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x'')$$

con $x' \in]x_0, x_1[$ e $x'' \in]x_1, x_2[$ punti opportuni, da cui

$$m_{AB} = f'(x') \leq f'(x'') = m_{BC}.$$

Deve dunque essere $m_{AB} \leq m_{BC}$, cioè f è convessa su I.

□

4. Passiamo ora a studiare alcune conseguenze analitiche del Teorema di Lagrange. Cominciamo con il seguente risultato.

   Teorema 5.42 (Derivata nulla). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f' = 0$ su I. Allora f è costante.*

   Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione, basta vedere che per ogni $x_1, x_2 \in I$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$. Per il teorema di Lagrange applicato a f sull'intervallo determinato da x_1 e x_2, si ha che esiste x_0 intermedio tra i due tale che

   $$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

   Essendo $f'(x_0) = 0$, si ha $f(x_2) - f(x_1) = 0$ e la tesi è dimostrata. ■

   Il risultato precedente ha una chiara interpretazione geometrica. Una funzione con derivata nulla è tale che il suo grafico ammette sempre tangenti orizzontali: l'unico modo perché ciò accada è che il grafico stesso sia una retta orizzontale, cioè f sia costante.

5. Il Teorema di Lagrange può essere usato per fornire una stima *quantitativa* di continuità . Vale il seguente risultato.

   Proposizione 5.43 (Stima quantitativa di continuità). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che*

   $$\sup_I |f'| = L < +\infty.$$

   Allora per ogni $x_0, x \in I$ si ha

   $$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|.$$

   Dimostrazione. Se $x_0, x \in I$, per il teorema di Lagrange esiste x_1 intermedio ad essi tale che

   $$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0).$$

   Prendendo i moduli si ottiene

   $$|f(x) - f(x_0)| = |f'(x_1)||x - x_0| \leq L|x - x_0|$$

   così che la tesi è così dimostrata. ■

Osservazione 5.44 (Funzioni lipschitziane). La disuguaglianza

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$$

può essere vista come una forma di *quantitativa* di continuità . Infatti possiamo dire quanto $f(x)$ sia vicina a $f(x_0)$ conoscendo la distanza tra x e x_0. Se ad esempio $\delta > 0$, se $|x-x_0| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta.$$

Le funzioni che soddisfano alla stima si dicono *funzioni lipschitziane* di costante L.

Esempio 5.45. Vale la disuguaglianza

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$$

essendo $(\sin x)' = \cos x$ e $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos x| = 1$. La funzione seno è dunque lipschitziana di costante 1 su $\mathbb{R}$.

5.7 Polinomio di Taylor di una funzione

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare che una funzione sufficientemente derivabile è approssimabile nelle vicinanze di un punto tramite polinomi di grado assegnato: stabiliremo anche una stima dell'errore che si commette nell'approssimazione, oltre a dare una interpretazione geometrica del risultato.

1. Sarà utile nel seguito il seguente lemma.

Lemma 5.46 (Lemma tecnico). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile $(n-1)$ volte in I e n volte in x_0 con*

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Se f è derivabile n volte su I (e non solo in x_0), allora si ha per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}, \tag{5.4}$$

essendo x_n un conveniente punto intermedio tra x_0 e x.

Dimostrazione. Per il teorema di Cauchy possiamo scrivere per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$

$$
\begin{aligned}
\text{(5.5)} \quad \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f'(x_1)}{n(x_1-x_0)^{n-1}} \\
&= \frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{n(x_1-x_0)^{n-1}} = \frac{f''(x_2)}{n(n-1)(x_2-x_0)^{n-2}} \\
&= \cdots = \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})}{n!(x_{n-1}-x_0)} = \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x_{n-1}-x_0)}
\end{aligned}
$$

dove x_1 è intermedio tra x_0 e x, x_2 è intermedio tra x_0 e x_1,..., e x_{n-1} è intermedio tra x_0 e x_{n-2}. Notiamo che per definizione di derivata si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = f^{(n)}(x_0).$$

Dunque se $x \to x_0$, si ha $x_{n-1} \to x_0$ e per composizione si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Se f è derivabile n-volte su I, tornando alla (5.5) ed applicando il Teorema di Lagrange otteniamo

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$

con x_n intermedio tra x e x_0: il lemma è così completamente dimostrato. ■

2. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.47 (Polinomio di Taylor). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte su I: diciamo polinomio di Taylor di grado n di f in x_0 il polinomio*

$$p_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Osservazione 5.48. Un conto diretto mostra che $p_{x_0,n}(x)$ ammette in x_0 le derivate fino all'ordine n uguali a quelle di f, cioè

$$p_{x_0,n}(x_0) = f(x_0), \quad p'_{x_0,n}(x_0) = f'(x_0), \quad p''_{x_0,n}(x_0) = f''(x_0), \quad \ldots, \quad p^{(n)}_{x_0,n}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Vale il seguente risultato fondamentale.

Teorema 5.49 (Approssimazione con il polinomio di Taylor). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in I. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_{x_0,n}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

In particolare, per ogni $x \in I$ si ha

$$f(x) = p_{x_0,n}(x) + r_n(x)$$

dove $r_n : I \to \mathbb{R}$ è una funzione infinitesima di ordine maggiore di n in x_0.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - p_{x_0,n}(x).$$

Poiché

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0,$$

applicando il Lemma 5.46 si ottiene proprio

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_{x_0,n}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ponendo $r_n(x) = f(x) - p_{x_0,n}(x)$ si ha dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

da cui la tesi.

■

Osservazione 5.50 (Interpretazione analitica). La relazione

$$f(x) = p_{x_0,n}(x) + r_n(x)$$

afferma che *una funzione derivabile n-volte su un intervallo I è approssimabile nelle vicinanze di un qualsiasi suo punto tramite un'espressione polinomiale di grado n a meno di un errore infinitesimo di ordine maggiore di n.* Ad esempio, se consideriamo la funzione esponenziale $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

Così al quarto ordine possiamo scrivere ad esempio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + r_4(x).$$

Osservazione 5.51 (Interpretazione geometrica). Da un punto di vista geometrico, la relazione

$$f(x) = p_{x_0,n}(x) + r_n(x)$$

può essere interpretata nel seguente modo: *il grafico di f è approssimato vicino a x_0 a meno di infinitesimi di ordine maggiore di n dal grafico di una curva di ordine n.*

1. Se $n = 1$, si ottiene l'approssimazione del grafico di f al primo ordine tramite quello della retta tangente, essendo

$$p_{x_0,1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ed il grafico associato a $p_{x_0,1}(x)$ quello appunto della retta tangente.

2. Se $n = 2$, si ottiene l'approssimazione del grafico di f al secondo ordine tramite quello di una *parabola* di equazione

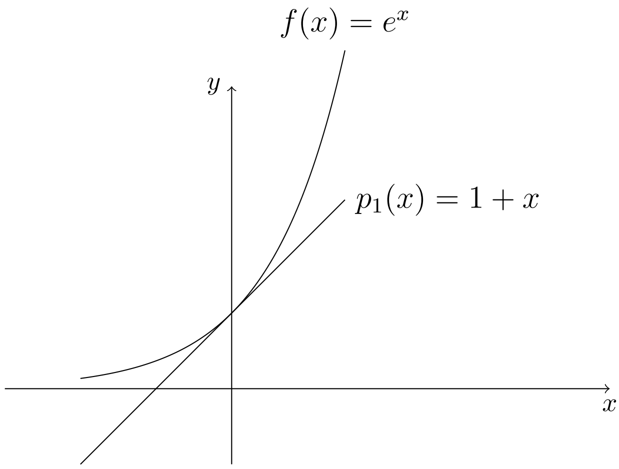
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2.$$

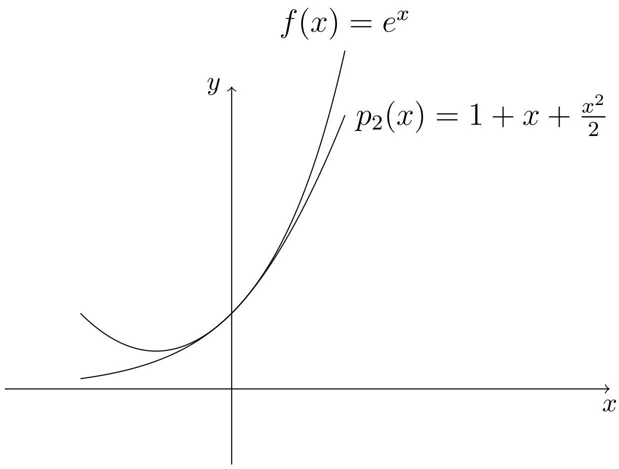
3. Se $n = 3$, si ottiene l'approssimazione del grafico di f al terzo ordine tramite quello di una *cubica* di equazione

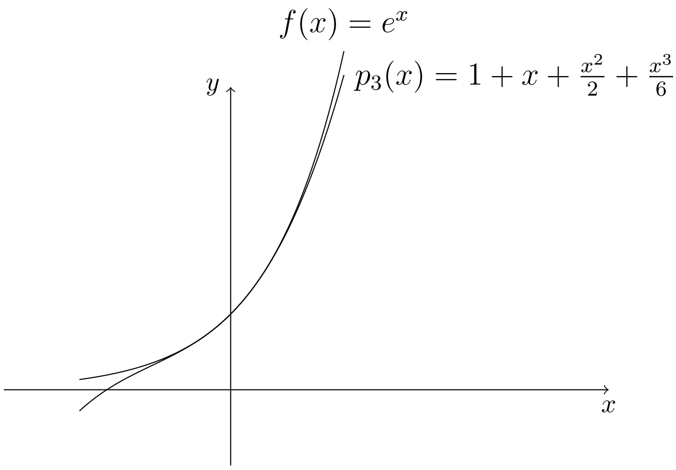
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Ad esempio il grafico $y = e^x$ della funzione esponenziale ammette vicino a $x = 0$ le seguenti approssimazioni ai primi tre ordini

$$y = 1 + x, \qquad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{e} \qquad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$







3. Cerchiamo ora di quantificare l'errore che si commette nell'approssimazione di f con il suo polinomio di Taylor.

   Teorema 5.52 (Resto di Lagrange). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile $(n+1)$-volte in I: allora possiamo scrivere per ogni $x \in I$*

   $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{5.6}$$

   essendo x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra x_0 e x.

   Dimostrazione. Consideriamo la funzione

   $$g(x) = f(x) - p_{x_0,n}(x).$$

   Notiamo che per costruzione del polinomio di Taylor si ha

   $$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

e $g^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ su I. Grazie al Lemma 5.46 si ha

$$\frac{f(x) - p_{x_0,n}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$$

con x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra x_0 e x. Si ottiene dunque

$$r_n(x) = f(x) - p_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

■

Osservazione 5.53 (Stima dell'errore nello sviluppo di Taylor). Ci si riferisce alla scrittura

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con x_{n+1} intermedio tra x_0 e x come *resto in forma di Lagrange dell'approssimazione.* Dunque una stima dell'errore di approssimazione è data ad esempio da

$$|r_n(x)| \leq \frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

Esempio 5.54. Ad esempio, se $f(x) = \sin x$, possiamo scrivere per $x_0 = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x).$$

Su $I = [0, \frac{1}{10}]$, essendo $f^{(4)}(x) = \sin x$, abbiamo la stima

$$|r_1(x)| = \frac{|\sin x_4|}{4!}|x|^4 \leq \frac{1}{4!}|x|^4 \leq \frac{1}{240.000}.$$

Concludiamo dunque che *dal punto di vista delle applicazioni* non c'è praticamente alcuna differenza tra l'espressione $\sin x$ e l'espressione $x - \frac{x^3}{3!}$ se $x \in [0, 1/10]$.

4. Supponiamo che I contenga l'origine: allora il polinomio di Taylor relativo a $x = 0$ viene detto *polinomio di Mac Laurin* e si ha lo *sviluppo di Mac Laurin di f all'ordine n*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

essendo x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra 0 e x.

Consideriamo i polinomi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.

1. **Polinomi**. Notiamo che dato un polinomio $p(x)$ di grado n, il suo resto in forma di Lagrange associato al polinomio di Taylor/Mac Laurin di grado n è identicamente nullo, poiché la derivata di ordine $(n+1)$ si annulla. Concludiamo che *il polinomio di Taylor/Mac Laurin di grado n di* $p(x)$ *coincide con* $p(x)$ *stesso.*

2. **Le funzioni razionali fratte.** La funzione razionale fratta $1/(1+x)$ ammette il seguente sviluppo all'ordine n
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

3. **Le funzioni algebriche.** La funzione $(1+x)^\alpha$ ammette il seguente sviluppo al primo ordine
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

4. **Le funzioni esponenziali e logaritmiche.** Valgono le seguenti approssimazioni con il polinomio di Mac Laurin di grado n
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
e
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5. **Le funzioni circolari**. Valgono le seguenti approssimazioni
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
e
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$
Per la funzione tangente si ha l'approssimazione al quinto ordine
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$
La funzione arcotangente ammette invece l'approssimazione
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

6. **Le funzioni iperboliche.** Valgono i seguenti sviluppi facilmente deducibili da quello di e^x e dalle definizioni di seno e coseno iperbolici:
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
e
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

5. Supponiamo che f sia infinitesima per $x \to x_0$ e che il primo polinomio di Taylor non banale di f sia di grado n, cioè

$$f(x) = c(x - x_0)^n + r_n(x),$$

dove $c \neq 0$. Allora abbiamo che f è infinitesima di ordine n per $x \to x_0$ e che il suo infinitesimo principale è $c(x - x_0)^n$. Dalla teoria degli infinitesimi concludiamo dunque che la tecnica degli sviluppi di Taylor (in particolare la lista di sviluppi sopra riportati) permette di semplificare notevolmente lo studio dei limiti della forma 0/0.

Ad esempio calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x - \sin x - 2}{x^3}.$$

Il numeratore ammette lo sviluppo

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) - 2$$

per cui l'infinitesimo principale è dato da

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^3}{3}.$$

Dunque il limite diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

5.8 Classificazione dei punti critici

In questa sezione daremo un criterio per decidere se un punto critico di una funzione è un massimo od un minimo locale. Vale il seguente risultato.

Teorema 5.55 (Classificazione dei punti critici: criterio della derivata n-esima). *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte e sia x_0 interno ad I un suo punto critico. Supponiamo che*

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad e \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Valgono i seguenti fatti:

(a) se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale;

(b) se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale;

(c) se n è dispari, allora x_0 non è né un punto di massimo locale né un punto di minimo locale.

Dimostrazione. Notiamo che il polinomio di Taylor di f in x_0 di grado n è dato da

$$p_{x_0,n}(f) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

così che

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

dove $r_n(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di n in x_0.

Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} \right] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

(a) Supponiamo che n sia pari e che $f^{(n)}(x_0) > 0$. Allora per il teorema di permanenza del segno si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0 \qquad \text{per ogni } x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$$

dove $\varepsilon > 0$ è opportunamente piccolo. Essendo $(x - x_0)^n$ una quantità sempre maggiore o uguale a zero, deduciamo che

$$f(x) - f(x_0) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$$

Dunque x_0 è un punto di minimo locale (stretto) per f.

(b) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, un ragionamento simile mostra che x_0 è un massimo locale (stretto) di f.

(c) Sia n dispari: allora ragionando come prima, si ha

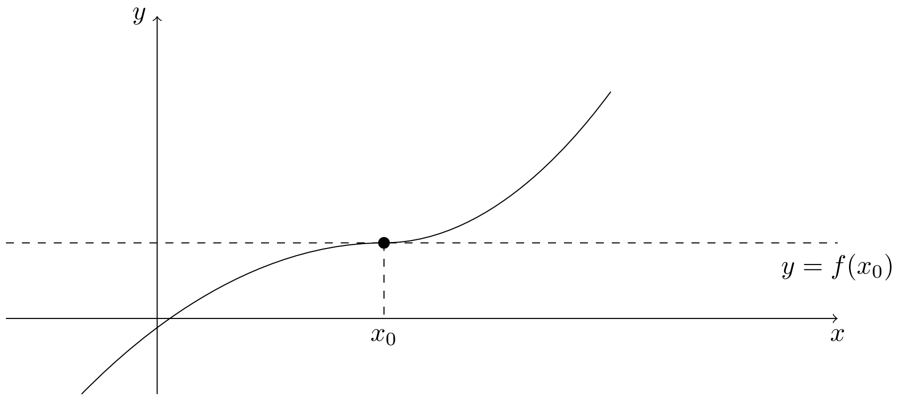
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$$

ha un segno definito su $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$ per $\varepsilon > 0$ numero positivo opportuno. Poiché il denominatore cambia segno passando da sinistra a destra di x_0 essendo n dispari, anche il numeratore deve farlo. Dunque x_0 non è né un massimo né un minimo locale per f, e la dimostrazione è conclusa.

∎

Osservazione 5.56 (Punti di flesso). Nel caso n dispari, dalla relazione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$



ricaviamo che il grafico di f attraversa la retta tangente $y = f(x_0)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$: infatti la quantità

$$f(x) - f(x_0)$$

cambia segno a seconda che $x < x_0$ o $x > x_0$.

Tali punti si dicono *punti di flesso* di f. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ ammette $x = 0$ come punto di flesso essendo $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 6 \neq 0$.

Osservazione 5.57. Il Teorema di classificazione risulta chiaro da un punto di vista geometrico nel caso in cui $n = 2$ e f risulta derivabile due volte su I con derivata seconda continua. In tal caso infatti, se fosse $f''(x_0) > 0$, grazie alla continuità di f'', risulterebbe che $f'' > 0$ in un conveniente intervallo J centrato in x_0. Dunque f risulta convessa su J, ed essendo la tangente in x_0 orizzontale, esso risulta di conseguenza un punto di minimo per f su J. Un discorso simile si può fare per il caso $f''(x_0) < 0$.

5.9 La regola di De l'Hopital

La regola di De l'Hopital è utile per il calcolo dei limiti che si presentano nelle forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{?}{\infty}.$$

La notazione $?/\infty$ indica che il denominatore ammette limite $+\infty$ o $-\infty$, mentre il numeratore potrebbe anche non ammettere limite.

1. La prima regola di De L'Hopital è la seguente.

Teorema 5.58 (Forma 0/0, caso I). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

e che $g' \neq 0$ su $]a,b[$. Se esiste

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora $g(x) \neq 0$ su $]a,b[$ e esiste anche il limite per $x \to a$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Notiamo che f e g possono essere estese con continuità ad $[a,b[$ ponendo

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Notiamo inoltre che si ha $g \neq 0$ su $]a,b[$: infatti se esistesse $x' \in]a,b[$ con $g(x') = 0$, per il Teorema di Rolle applicato a g su $[a,x']$ si dedurrebbe l'esistenza di $x'' \in]a,x'[$ con $g'(x'') = 0$, contro l'ipotesi su g'. Il rapporto tra f e g risulta dunque ben definito su $]a,b[$.

Per il Teorema di Cauchy possiamo scrivere per ogni $x \in]a,b[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

dove $x_0 \in]a,x[$. Sia

$$l = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poiché se $x \to a$ si ha $x_0 \to a$ e dunque

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \to l,$$

otteniamo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

e la tesi è dimostrata. ∎

Osservazione 5.59. Chiaramente il teorema precedente vale anche per il limite per $x \to b$ nel caso in cui $f(b) = g(b) = 0$.

2. Un cambio di variabile porta al seguente risultato.

Teorema 5.60 (Forma $0/0$, caso II). *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

e che $g' \neq 0$ su $]a, +\infty[$. Se esiste
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
allora $g \neq 0$ su $]a, +\infty[$ e esiste anche il limite per $x \to +\infty$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere ponendo $x = \frac{1}{t}$ e applicando la regola di de l'Hopital vista nel Teorema precedente (le ipotesi della regola sono soddisfatte per le nuove funzioni della variabile t)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(1/t)}{-\frac{1}{t^2} g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

da cui la tesi. ∎

Osservazione 5.61. Il teorema precedente vale chiaramente anche nel caso del limite per $x \to -\infty$ sotto le analoghe ipotesi.

3. Vale il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 5.62 (Forma $?/\infty$, caso I). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \qquad o \qquad \lim_{x\to a} g(x) = -\infty,$$

e che $g' \neq 0$ su $]a, b[$. Se esiste
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
allora esiste anche il limite per $x \to a$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chiaramente, scambiando i ruoli di a e b, il risultato vale anche per $x \to b$. Operando il cambiamento di coordinate visto nella dimostrazione del Teorema 5.60, deduciamo infine anche la validità della seguente variante.

Teorema 5.63 (Forma $?/\infty$, caso II). *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \qquad o \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$

e che $g' \neq 0$ su $]a, +\infty[$. Se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \to +\infty$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Osservazione 5.64. Chiaramente, sotto le opportune ipotesi, vale anche il risultato per $x \to -\infty$.

Osservazione 5.65. Notiamo che se il limite del rapporto f'/g' non esiste, non è possibile concludere che il limite del rapporto f/g non esiste. Infatti basta considerare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x}$$

che esiste e vale 1. D'altro canto, il limite da analizzare per la regola di De l'Hopital è

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - \cos x)$$

ed esso non esiste.

4. La formula di De l'Hopital può essere utile per lo studio anche di forme indeterminate diverse da quelle menzionate nei teoremi corrispondenti.

   1. **Forma** $0 \cdot \infty$. In tal caso si scrive

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

   e l'ultimo limite si presenta nella forma $0/0$: se le ipotesi sono soddisfatte, è possibile applicare la corrispondente regola.

   2. **Forma** $+\infty - \infty$. In tal caso si scrive

   $$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

   e la frazione tra parentesi quadre presenta una forma ∞/∞ trattabile sotto opportune ipotesi con la regola.

3. **Forme 0^0, ∞^0 e 1^∞.** Si presentano per espressioni del tipo $f(x)^{g(x)}$: si scrive (supponendo che le espressioni abbiano senso)
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}.$$
Dunque grazie alla continuità della funzione esponenziale, basta studiare il limite dell'esponente, e cioè
$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$$
che si presenta nella forma $0\cdot\infty$ già trattata in un punto precedente. Se il limite esiste e vale $l\in\mathbb{R}$ ad esempio, il limite iniziale varrà e^l.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5.66. Forma 0/0. Studiamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}.$$
Si ha che il limite delle derivate è
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$
per cui il limite iniziale vale 1.

Esempio 5.67. Forma ∞/∞. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln\tan x}.$$
Il limite delle derivate è
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\tan^2 x} = 1.$$

Esempio 5.68. Forma $0\cdot\infty$. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \qquad \text{con } \alpha>0.$$
Il limite può essere scritto nella forma
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$$
che è della forma ∞/∞. Si ha che il limite delle derivate è
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$$
e dunque il limite iniziale vale zero anche se α è piccolissimo ma positivo.

Esempio 5.69. Forma $+\infty - \infty$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right).$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$

per cui il limite delle derivate vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Si presenta ancora una forma $0/0$: possiamo applicare nuovamente la regola di De l'Hopital ottenendo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

Tale limite non presenta più una forma indeterminata: il limite vale 0.

Esempio 5.70. Forma 0^0. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

per cui grazie ad un esempio precedente si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Osservazione 5.71. Come visto nell'esempio 5.69, può capitare che applicando la regola di De l'Hopital il limite delle derivate si presenti ancora nella forma $0/0$ o $?/\infty$. Si può (se le ipotesi lo consentono) applicare nuovamente la regola scrivendo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Se necessario si può passare alle derivate terze e così via.

5. Tramite la regola di De l'Hopital possiamo stabilire alcuni confronti tra infiniti molto utili nel calcolo dei limiti.

Teorema 5.72 (Confronti tra infiniti). *Per $x \to +\infty$, la funzione esponenziale $e^{\beta x}$ con $\beta > 0$ è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza reale x^α con $\alpha > 0$. Inoltre la potenza reale x^α con $\alpha > 0$ è un infinito di ordine superiore rispetto alla funzione $\ln^\gamma x$ per qualsiasi $\gamma > 0$.*

Dimostrazione. Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\gamma x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\gamma}}\right)^\gamma$$

per cui basta analizzare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha/\gamma}}.$$

Applicando la regola di De l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha/\gamma}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\alpha}{\gamma} x^{\frac{\alpha}{\gamma}-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} x^{\alpha/\gamma}} = 0.$$

Per il primo confronto, ponendo $e^{\beta x} = t$, si ottiene $x = \frac{1}{\beta} \ln t$ da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{\beta} \ln t\right)^\alpha}{t} = 0.$$

■

Esercizi

1. Trovare due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ non derivabili in un punto ma tali che la loro somma sia derivabile.

2. Trovare due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ non derivabili in un punto ma tali che il loro prodotto sia derivabile.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Dimostrare che f è derivabile su $\mathbb{R}$ ma con derivata prima discontinua in $x = 0$.

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile: dimostrare che f' assume su I tutti i valori intermedi tra $f'(a)$ e $f'(b)$ (Teorema di Darboux).

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   Dimostrare che non esiste alcuna funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con $F' = f$ su $\mathbb{R}$.

6. Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I e derivabile su $I \backslash \{x_0\}$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = a.$$

   Dimostrare che f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = a$.

7. Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistono $\alpha, C > 0$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^{1+\alpha}.$$

   Dimostrare che f è costante su I.

8. Trovare una funzione lipschitziana su $\mathbb{R}$ ma non derivabile.