Capitolo 8

Equazioni differenziali ordinarie

In questo capitolo ci occuperemo brevemente delle equazioni differenziali ordinarie, concentrandoci su alcune tipologie notevoli che ricorrono nelle applicazioni.

8.1 Motivazioni

Descriviamo brevemente due problemi che sono di motivazione per l'introduzione del problema delle equazioni differenziali : il primo problema è di natura fisica, mentre il secondo è di natura geometrica.

1. Supponiamo che un punto P di massa m si muova lungo una retta soggetto ad una forza f dipendente dalla sua posizione, dalsvelocità ed eventualmente dal tempo. Se $s(t)$ indica la sua posizione a tempo t, un ragionamento simile a quello visto in precedenza relativo all'interpretazione di $\dot{s}(t)$ come velocità istantanea di P porta a considerare
$$\ddot{s}(t)$$
come la sua *accelerazione istantanea.* Dunque la seconda legge di Newton afferma che il moto è governato dalla relazione
$$m\ddot{s}(t) = f(t, s(t), \dot{s}(t)).$$
Tale relazione rappresenta un'equazione differenziale ordinaria nell'incognita $s(t)$. Ad esempio, se P è soggetto ad una forza elastica $f = -ks$, si ha l'equazione
$$m\ddot{s} = -ks,$$
essendo k la costante della molla.

   Essendo il moto completamente determinato dal fatto di conoscere posizione e velocità di P all'istante iniziale t_0, la sua comprensione porta al problema
$$\begin{cases} \ddot{s}(t) = \frac{1}{m} f(t, s(t), \dot{s}(t)) \\ s(t_0) = s_0 \\ \dot{s}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

detto *problema di Cauchy* relativo all'equazione differenziale $\ddot{s}(t) = \frac{1}{m}f(t, s(t), \dot{s}(t))$.

2. Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una famiglia di curve nel piano determinate dalla relazione

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{8.1}$$

dove x varia in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $c_i \in \mathbb{R}$ per $i = 1, \ldots, n$. Per determinare una curva di $\mathcal{C}$ dobbiamo in generale assegnare n condizioni per bloccare le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ci domandiamo se esiste una qualche equazione a cui il generico elemento di $\mathcal{C}$ deve soddisfare. Derivando rispetto a x possiamo scrivere delle relazioni del tipo

$$\begin{cases} y'(x) = f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y''(x) = f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) = f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \end{cases}$$

dove f_i indica la derivata i-esima rispetto a x. Supponiamo di poter ricavare $c_1, \ldots, c_n$ dalle relazioni precedenti in funzione delle quantità $(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$. Sostituendo in (8.1) otteniamo che la generica curva di $\mathcal{C}$ soddisfa ad una relazione del tipo

$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

che coinvolge x, la funzione $y(x)$ e le sue derivate fino all'ordine n.

8.2 Formulazione del problema

In questa sezione formuleremo matematicamente il problema delle equazioni differenziali ordinarie e faremo alcune osservazioni elementari introduttive.

1. Un'equazione differenziale ordinaria è una relazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Si dice che essa ha ordine n poiché la derivata massima che vi compare è quella n-esima. Grazie a quanto visto nella sezione precedente, ci aspettiamo che un'equazione di questo tipo ammetta in generale infinite soluzioni dipendenti da n costanti. Per determinare una soluzione in particolare, occorre assegnare condizioni aggiuntive. Seguendo le considerazioni suggerite dall'analisi del moto di un punto materiale, ricoprono particolare interesse le condizioni per cui la funzione e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ in un punto x_0 assumano alcuni valori assegnati. Si giunge così al problema

$$
\begin{cases}
F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\
y(x_0) = a_0 \\
y'(x_0) = a_1 \\
\dots \\
y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}
\end{cases}
\tag{8.2}
$$

detto *problema di Cauchy* associato all'equazione differenziale.

Esempio 8.1. Sono equazioni differenziali ordinarie ad esempio

$$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

e

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

La prima è un'equazione del primo ordine nell'incognita $y(x)$. Essendo chiaro che la variabile indipendente è x, si usa indicare l'equazione anche nella forma

$$y' = x + \arctan y.$$

La seconda è un'equazione del secondo ordine nell'incognita $z(t)$ che si può scrivere nella forma

$$z'' + 2z' + z = \sin t$$

omettendo la dipendenza da t.

Osservazione 8.2. Il problema della primitiva può essere visto come una particolare equazione differenziale: infatti trovare la primitiva di f su un intervallo I equivale proprio a risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x).$$

Si vede in questo esempio come le soluzioni dell'equazione siano infinite e dipendano effettivamente da una costante arbitraria. Considerando equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) = f(x),$$

vediamo come le costanti arbitrarie possano essere effettivamente n.

2. Lo studio teorico del problema di Cauchy (8.2) risulta particolarmente delicato: esempi espliciti mostrano che l'esistenza di soluzioni e la loro unicità risultano fatti del tutto non scontati. Ci accontentermo di enunciare il seguente risultato fondamentale sotto ipotesi non ottimali.

Teorema 8.3. *Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e*

$$f = f(x, a_1, \dots, a_{n-1}) : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una funzione derivabile separatamente rispetto alle sue variabili con derivate continue. Siano $x_0 \in J$ e $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{8.3}$$

ammette una ed una sola soluzione (massimale) $y : I \to \mathbb{R}$ dove $x_0 \in I \subseteq J$. Tale soluzione è unica nel seguente senso: se $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ è un'altra soluzione, allora $\tilde{I} \subseteq I$ e

$$\forall x \in \tilde{I} \ : \ \tilde{y}(x) = y(x).$$

Osservazione 8.4. L'equazione differenziale

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

si dice in *forma normale*. Come visto in precedenza, lo studio del moto di un punto materiale porta all'equazione differenziale del secondo ordine in forma normale

$$\ddot{s} = \frac{1}{m} F(t, s, \dot{s}).$$

Osservazione 8.5 (Alcune conseguenze del teorema di unicità). Vediamo alcune conseguenze analitiche molto utili del teorema di esistenza ed unicità per equazioni del tipo

$$y' = f(x, y).$$

(a) Siano $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ due soluzioni (massimali) dell'equazione: allora per ogni $x \in I_1 \cap I_2$ si ha

$$y_1(x) \neq y_2(x).$$

In termini geometrici possiamo dire che i grafici di y_1 e y_2 non possono intersecarsi. Se infatti per assurdo fosse $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_1(x_0) \end{cases}$$

ammetterebbe due soluzioni (massimali) distinte, contro il teorema di unicità .

(b) *Soluzioni stazionarie.* Supponiamo che $c \in \mathbb{R}$ sia tale che

$$f(x, c) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Allora si ha immediatamente che l'equazione $y' = f(x, y)$ ammette la soluzione costante

$$\tilde{y}(x) = c.$$

Tale soluzione (in un certo senso banale) viene detta una *soluzione stazionaria* dell'equazione. Ad esempio l'equazione

$$y' = x \sin y$$

ammette infinite soluzioni stazionarie date da $\tilde{y} = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Invece l'equazione

$$y' = 1 + y^2$$

non ammette soluzioni stazionarie.

(c) *Alcune proprietà qualitative delle soluzioni.* Diciamo $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni stazionarie dell'equazione

$$y' = f(x, y).$$

Grazie all'osservazione precedente, abbiamo che ogni altra soluzione non stazionaria $y(x)$ dell'equazione non può mai intersecare un elemento di $\mathcal{S}$, cioè $y(x)$ non può mai assumere un valore stazionario. Questa semplice osservazione può talvolta tradursi in proprietà qualitative interessanti sulle soluzioni dell'equazione differenziale. Se ad esempio 0 è una soluzione stazionaria dell'equazione, allora ogni altra soluzione è positiva o negativa sul suo intero dominio di definizione: si ha dunque un'informazione a priori sul segno della soluzione.

3. Nel seguito ci occuperemo di alcuni tipi di equazioni differenziali che ricorrono spesso nelle applicazioni alla fisica ed all'ingegneria.

8.3 Equazioni a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo

$$y' = f(y)g(x) \tag{8.4}$$

dove f, g sono funzioni derivabili definite su due intervalli I e J. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{8.5}$$

con $x_0 \in J$ e $y_0 \in I$. Supponiamo che per il problema valga il risultato di esistenza ed unicità della soluzione.

1. Per risolvere l'equazione (8.4), seguiamo un *procedimento formale* molto usato nelle applicazioni (esso può giustificarsi pienamente anche da un punto di vista teorico, ma non ce ne occuperemo).

   Ponendo $y' = dy/dx$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

possiamo scrivere

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx.$$

Integrando ambo i membri, arriviamo a

$$H(y) = G(x) + c, \tag{8.6}$$

dove H è una primitiva di $1/f$, G è una primitiva di g e $c \in \mathbb{R}$. Questa relazione definisce in forma implicita la soluzione y in funzione di x. La costante c si determina sostituendo la condizione iniziale: si ha

$$H(y_0) = G(x_0) + c \Longrightarrow c = H(y_0) - G(x_0).$$

Il procedimento di risoluzione giustifica il nome di *equazioni a variabili separabili*: esse si risolvono tramite due integrazioni nelle variabili y e x separatamente.

Osservazione 8.6. Sia

$$\mathcal{S} := \{c \in \mathbb{R} \,:\, f(c) = 0\}$$

la famiglia delle soluzioni stazionarie dell'equazione. Supponiamo che $y : I \to \mathbb{R}$ non sia una soluzione stazionaria dell'equazione: allora sappiamo che per ogni $x \in I$

$$f(y(x)) \neq 0.$$

Ciò giustifica, nel procedimento visto sopra, la divisione per $f(y)$: a priori sappiamo che per le soluzioni non banali dell'equazione, tale quantità non si annulla mai.

2. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 8.7. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \\ y(2) = 7. \end{cases}$$

Si ha $\frac{dy}{dx} = e^y$

$$\frac{dy}{e^y} = dx$$

da cui

$$-e^{-y} = x + c.$$

Tramite la condizione iniziale si ha

$$c = -e^{-7} - 2.$$

Otteniamo dunque

$$-e^{-y} = x - e^{-7} - 2$$

da cui

$$e^{-y} = e^{-7} + 2 - x$$

ed infine

$$y = -\ln\left(e^{-7} + 2 - x\right).$$

Esempio 8.8. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \sin t \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Qui l'incognita è una funzione $x(t)$. Ponendo $x' = dx/dt$ si ha

$$\frac{dx}{x} = \sin t \, dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int \sin t \, dt$$

e quindi

$$\ln|x| = -\cos t + c.$$

Notiamo che $z(t) = 0$ è soluzione stazionaria dell'equazione. Dunque la nostra soluzione $x(t)$ ha un segno definito sul suo dominio: essendo $x(0) = 1 > 0$, abbiamo che $x(t) > 0$ per ogni t appartenente al dominio di definizione. Possiamo dunque eliminare il modulo e scrivere

$$\ln x = -\cos t + c.$$

Poiché $x(0) = 1$ si ha

$$\ln 1 = -1 + c$$

da cui $c = 1$. Otteniamo dunque

$$\ln x = 1 - \cos t$$

da cui

$$x(t) = e^{1-\cos t}.$$

Esempio 8.9. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy\sin y \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la funzione $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale e soddisfa anche la condizione iniziale: per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, abbiamo che $y(x) = 0$ è la funzione che stiamo cercando.

8.4 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Si tratta di equazioni del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{8.7}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite su un intervallo I. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{8.8}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Vediamo come risolvere il problema di Cauchy (8.8). Sia A una primitiva di a su I. Allora

$$e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = e^{A(x)}b(x).$$

Ma si ha

$$e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = \left[e^{A(x)}y(x)\right]'$$

per cui

$$\left[e^{A(x)}y(x)\right]' = e^{A(x)}b(x).$$

Integrando da x_0 a x si ottiene

$$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds,$$

da cui, tenendo conto che $y(x_0) = y_0$, si ottiene

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[e^{A(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right].$$

Se supponiamo che $A(x_0) = 0$, cioè scegliamo come A la primitiva di a che vale 0 in x_0, otteniamo la formula

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]. \tag{8.9}$$

2. Riassumendo, la **formula risolutiva per il problema di Cauchy** (8.8) è data da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]$$

dove A è la primitiva di a su I che vale 0 in x_0, cioè

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds.$$

3. Se poniamo $y_0 = c$ nella formula (8.9), al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (8.7) (in questo caso $A(x)$ può essere una *qualunque* primitiva di $a(x)$).

4. Vediamo un esempio.

Esempio 8.10. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Si ha $a(x) = 2$ e $b(x) = e^x$. Dunque

$$A(x) = \int_1^x 2\, ds = [2s]_1^x = 2(x-1).$$

Si ottiene

$$y(x) = e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{2(s-1)} e^s\, ds \right].$$

Dunque

$$\begin{aligned} y(x) =& e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{3s-2}\, ds \right] = e^{-2(x-1)} \left[3 + \left[\frac{e^{3s-2}}{3} \right]_1^x \right] \\ =& e^{-2(x-1)} \left[3 + \frac{e^{3x-2}}{3} - \frac{e}{3} \right]. \end{aligned}$$

8.5 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono le equazioni della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \tag{8.10}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. La funzione $f(x)$ si dice *termine forzante* dell'equazione. L'equazione

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \tag{8.11}$$

si dice l'equazione omogenea associata alla precedente. Il problema di Cauchy associato è della forma

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{8.12}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

1. Per risolvere le equazioni (8.10), facciamo la seguente osservazione fondamentale: se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione, allora la differenza $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (8.11). Infatti si ha

$$\begin{aligned} & v''(x) + av'(x) + bv(x) \\ =& (y_1(x) - y_2(x))'' + a(y_1(x) - y_2(x))' + b(y_1(x) - y_2(x)) \\ =& [y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] - [y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)] = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Dunque la generica soluzione dell'equazione può esprimersi nella forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Dunque la **strategia** per risolvere il problema di Cauchy (8.12) per equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente.

1. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

2. Determinare una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione di partenza.

3. Determinare le costanti generiche che compaiono utilizzando le condizioni iniziali.

2. Consideriamo l'**equazione omogenea**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Per trovarne tutte le soluzioni, si considera il **polinomio caratteristico**

$$P(z) = z^2 + az + b$$

e si pongono diverse alternative.

1. **Se P ammette due radici reali e distinte** λ_1 e λ_2 (caso $a^2 - 4b > 0$), la soluzione generica dell'equazione omogenea è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. **Se P ammette una sola radice reale λ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. **Se P ammette due radici complesse coniugate** $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) \right)$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 8.11. Data l'equazione

$$y'' - 4y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 4$ ammette le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Esempio 8.12. Data l'equazione

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 2z + 1$ ammette come soluzione doppia $\lambda = 1$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{x}.$$

Esempio 8.13. Data l'equazione

$$y'' + y' + y = 0$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + z + 1$ ammette come soluzioni $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$$

3. La **determinazione di una soluzione particolare** $\tilde{y}$ dell'equazione (8.10) è in generale un problema difficile. Esso può semplificarsi se il termine forzante $f(x)$ è della forma

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \tag{8.13}$$

o

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) \tag{8.14}$$

dove R_k è un polinomio di grado k. Esempi di termini forzanti di questo tipo sono

$$f(x) = x^2e^x, \quad f(x) = x, \quad f(x) = \sin 2x$$

oppure

$$f(x) = x^3e^{2x}\cos 3x.$$

Per trovare una soluzione particolare, si considera il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

e si pongono due alternative.

1. Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

2. Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ con molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare dell'equazione è della forma

$$x^he^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo direttamente nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 8.14. Consideriamo l'equazione

$$y'' - 2y = 2e^x.$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ che ammette come radici $z = \pm\sqrt{2}$. Il termine forzante $f(x) = 2e^x$ è della forma (8.13) con la scelta $k = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 1$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione della forma

$$\tilde{y}(x) = ce^x.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$ce^x - 2ce^x = 2e^x,$$

da cui $c = -2$. Concludiamo che una soluzione particolare è $\tilde{y}(x) = -2e^x$.

Esempio 8.15. Consideriamo l'equazione

$$y'' + 4y = 2 + \sin 2x. \tag{8.15}$$

Il termine forzante $f(x) = 2 + \sin 2x$ è somma di due termini forzanti

$$f_1(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \sin 2x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione, grazie alla sua linearità , basta trovare due soluzioni particolari relative a f_1 e f_2 e sommarle tra loro, cioè basta trovare $\tilde{y}_1(x)$ e $\tilde{y}_2(x)$ tali che

$$\tilde{y}_1''(x) + 4\tilde{y}_1(x) = 2 \tag{8.16}$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) + 4\tilde{y}_2(x) = \sin 2x \tag{8.17}$$

e considerare $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$. Per quanto riguarda $f_1(x) = 2$, esso è del tipo (8.13) con $k = \alpha = \beta = 0$. Si ha $\tilde{z} = 0$, che non è radice del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ di (8.16) della forma

$$\tilde{y}_1(x) = c.$$

Sostituendo in (8.16) si ricava

$$4c = 2 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

cioè $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda $f_2(x) = \sin 2x$, esso è della forma (8.14) con $k = \alpha = 0$ e $\beta = 2$. Dunque $\tilde{z} = 2i$, che è radice di molteplicità uno del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Esiste allora una soluzione particolare $\tilde{y}_2$ di (8.17) della forma

$$\tilde{y}_2(x) = x\left[c\cos 2x + d\sin 2x\right].$$

Dunque

$$\tilde{y}_2'(x) = c\cos 2x + d\sin 2x + x\left[-2c\sin 2x + 2d\cos 2x\right].$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) = -4c\sin 2x + 4d\cos 2x + x\left[-4c\cos 2x - 4d\sin 2x\right].$$

Sostituendo in (8.17) si ha

$$-4c\sin 2x + 4d\cos 2x = \sin 2x$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad d = 0.$$

Si ha dunque

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

In conclusione, una soluzione particolare dell'equazione (8.15) è data da

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

4. Vediamo un esempio di risoluzione di un problema di Cauchy seguendo la strategia vista al punto 1. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ e

$$z^2 - 2 = 0 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{2}.$$

Si hanno due radici reali distinte $z_1 = \sqrt{2}$ e $z_2 = -\sqrt{2}$. La soluzione generica dell'equazione omogenea associata è data da

$$c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare: il termine forzante $f(x) = 2$ è della forma particolare considerata al punto precedente con la scelta $k = \alpha = \beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 0$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}$ della forma

$$\tilde{y}(x) = c.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$-2c = 2,$$

cioè $c = -1$. Abbiamo dunque che la soluzione generica dell'equazione completa è

$$y(x) = -1 + c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Le costanti c_1, c_2 si determinano attraverso le condizioni iniziali. Poiché $y'(x) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x}$, otteniamo da $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$

$$\begin{cases} -1 + c_1 + c_2 = -1 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La soluzione del problema è

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x} \right].$$

8.6 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Si tratta di equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x),$$

dove $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

1. **La risoluzione di equazioni di questo tipo è analoga a quanto già visto per le equazioni di ordine due**. Si ha che le generica soluzione è della forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione generica dell'omogenea associata dipende da n costanti che vengono determinate attraverso le condizioni iniziali del problema.

2. La **generica soluzione dell'omogenea associata** si trova considerando il polinomio caratteristico
$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$
Esso ha in generale n radici: a differenza che nel caso $n = 2$, tali soluzioni possono avere molteplicità $h > 2$. Per scrivere la generica soluzione dell'equazione omogenea, si procede come segue.

    1. Si individuano tutte le radici di $P(z)$.
    2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di $P(z)$ di molteplicità h, ad essa è associata una soluzione della forma
    $$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{h-1} x^{h-1}) e^{\lambda x},$$
    dove $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sono costanti generiche.
    3. Se $\alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate di $P(z)$ con molteplicità h, allora ad essa è associata una soluzione della forma
    $$e^{\alpha x} \left[(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{h-1} x^{h-1}) \cos(\beta x) \right. \\ \left. + (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{h-1} x^{h-1}) \sin(\beta x) \right],$$
    dove $d_0, d_1, \ldots, d_{h-1}, f_0, f_1, \ldots, f_{h-1}$ sono costanti generiche.
    4. La generica soluzione dell'equazione omogenea è data dalla somma delle soluzioni dei punti (a) e (b), al variare di tutte le radici di $P(z)$.

Esempio 8.16. Consideriamo ad esempio l'equazione
$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$$
Il polinomio caratteristico è
$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$$
che si può fattorizzare nel seguente modo
$$P(z) = (z-1)^2 (z^2 + 4).$$
Dunque le radici di $P(z)$ sono $\lambda = 1$ con molteplicità 2, e la coppia di radici complesse coniugate $\pm 2i$. Dunque la generica soluzione dell'equazione è data da
$$y(x) = (c_0 + c_1 x) e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$
con $c_0, c_1, d_0, f_0 \in \mathbb{R}$.

3. Come nel caso $n = 2$, **la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione diviene semplice se il termine forzante è del tipo**

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

o

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

dove R_k è un polinomio di grado k. In tal caso si considera il numero complesso $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ e si procede come segue.

1. Se $\tilde{z}$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

2. Se $\tilde{z}$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ di molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare dell'equazione della forma

$$x^h e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 8.17. Consideriamo l'equazione

$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = e^{2x}$$

e determiniamone una soluzione particolare: si ha $\tilde{z} = 2$, ed esso non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$, le cui radici sono, per quanto visto all'esempio precedente, $z = 1$ e $z = \pm 2i$. Dunque l'equazione ammette una soluzione particolare della forma $\tilde{y}(x) = ce^{2x}$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$(16c - 16c + 20c - 16c + 4c)e^{2x} = e^{2x}$$

da cui $c = 1/8$. Dunque una soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \frac{1}{8}e^{2x}$. La soluzione generale dell'equazione è data dunque da

$$y(x) = \frac{1}{8}e^{2x} + (c_0 + c_1 x)e^x + d_0\cos 2x + f_0\sin 2x,$$

dove c_0, c_1, d_0, f_0 sono generiche costanti.

Esercizi

1. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

2. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni.

3. Trovare una soluzione del problema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

con le condizione iniziale $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. (Suggerimento: derivando la prima equazione si ottiene $x'' = x' + y'$, per cui si può sostituire nella seconda...)

4. Trovare la funzione $z(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che risolve il problema

$$\begin{cases} z'(t) = iz(t) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

5. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. (Suggerimento: scrivi $z(t) = x(t) + iy(t)$ e trova l'equazione corrispondente per z.)