Capitolo 7

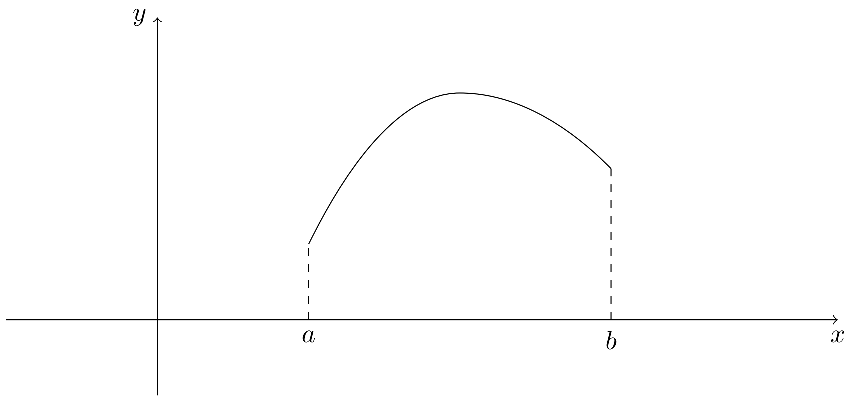
Integrale di Riemann

In questo capitolo svilupperemo la teoria dell'integrazione secondo Riemann per funzioni di una variabile reale.

7.1 Motivazioni

Consideriamo i seguenti problemi.

1. **Calcolo di un'area.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva il cui grafico sia quello rappresentato in figura.



L'area A della figura compresa tra il grafico di f e il segmento $[a, b]$ riportato sull'asse delle x non è calcolabile elementarmente se il grafico di f non è rettilineo. Un modo per calcolare A può essere quello di usare il seguente processo di approssimazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ tramite dei punti di suddivisione $x_1, x_2, \dots, x_n$ e poniamo per comodità $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$. Sia I_j l'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$. Se I_j è abbastanza piccolo, la variazione di f su I_j sarà piccola, cioè f sarà approssimativamente costante. Sia $\xi_j \in I_j$:

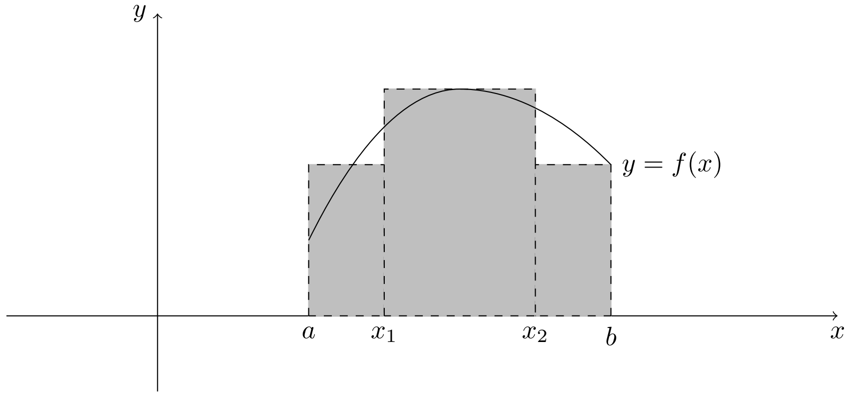
un'approssimazione dell'area A_j sottesa da f su I_j è dunque

$$A_j \approx f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Concludiamo che un'approssimazione di A è data dalla somma delle A_j, cioè

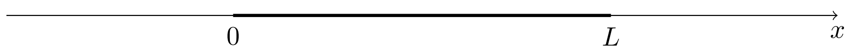
$$A \approx \tilde{A} = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j). \tag{7.1}$$

Se la scelta dei punti di suddivisione è operata in modo da risultare abbastanza fitta, ci si aspetta che $\tilde{A}$ sia una buona approssimazione di A: anzi, più la suddivisione è fitta, più $\tilde{A}$ si avvicinerà ad A.



2. **Calcolo della massa di una trave.** Consideriamo una trave di lunghezza L riportata sull'asse reale in modo che un estremo sia in $x = 0$ e l'altro in $x = L$. Sia $\rho(x)$ la densità di massa per unità di lunghezza nel punto $x \in [0, L]$: ciò significa che una piccola zona di lunghezza ε vicino a x ha massa

$$m_\varepsilon \approx \rho(x)\varepsilon.$$



La funzione $\rho(x)$ non è supposta continua: in questo modo è possibile tenere conto del fatto che la trave sia composta di diversi materiali nelle sue diverse parti, un caso che può essere utile nelle applicazioni.

Un'approssimazione della massa M della trave può ottenersi nel seguente modo: scegliamo dei punti di suddivisione $x_1, x_2, \dots, x_n$, ponendo per comodità $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = L$, ed includendo in essi i punti di discontinuità di ρ. Se l'intervallo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ è sufficientemente piccolo, la massa del tratto I_j è data circa da

$$m_j \approx \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

dove ξ_j è un punto di I_j, ad esempio il suo punto medio. Dunque un'approssimazione della massa M della trave è data dall'espressione

$$M \approx \tilde{M} = \sum_{j=0}^{n} \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

All'infittirsi della suddivisione, $\tilde{M}$ diverrà un'approssimazione sempre migliore di M. Abbiamo ottenuto un risultato simile a quello della formula (7.1).

7.2 Definizione di integrale

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo limitato con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè esiste una costante $M \geq 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Diamo ora una formulazione matematica rigorosa delle idee viste nella sezione precedente.

1. Diciamo che $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

2. Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diremo che la quantità

$$\sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione S. Come visto nella sezione precedente, le somme di Riemann nascono in modo naturale nelle applicazioni.

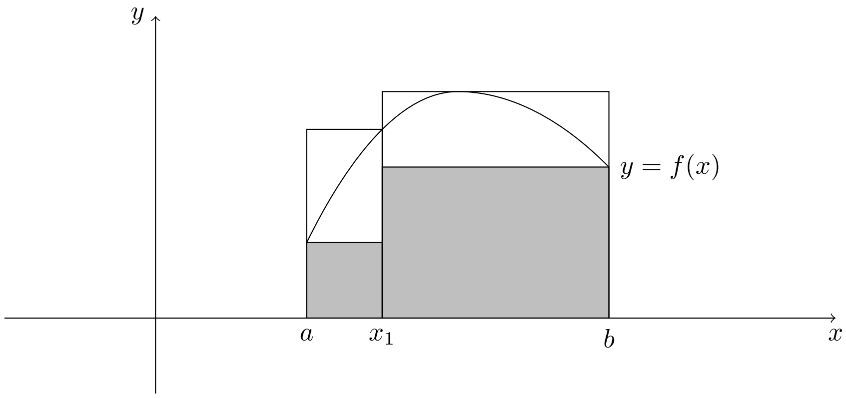
3. Poniamo

$$\Sigma'(f, S) = \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

e

$$\Sigma''(f, S) = \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

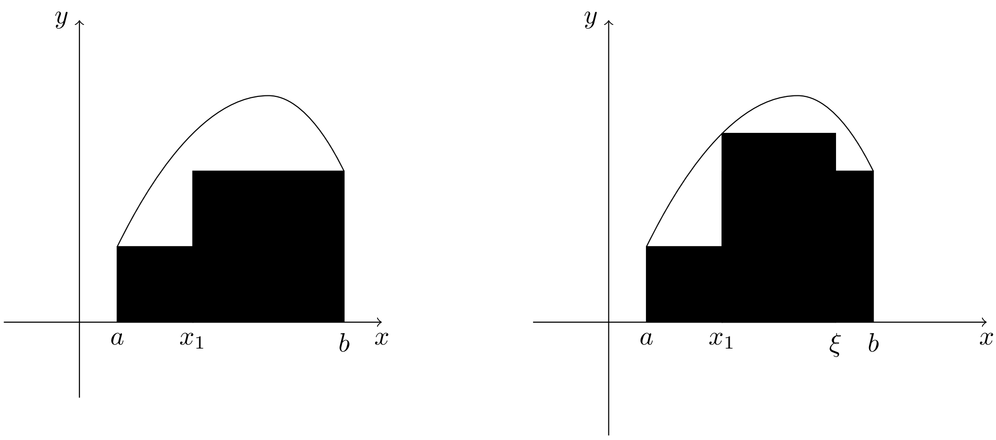
I numeri reali $\Sigma'(S, f)$ e $\Sigma''(S, f)$ si chiamano rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** associate alla funzione f e alla suddivisione S. Chiaramente, ogni somma di Riemann relativa a S è compresa tra $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$.



4. Diciamo che una suddivisione T è un raffinamento della suddivisione S se T contiene i punti di suddivisione di S, cioè $S \subseteq T$. In tal caso si ha che

$$\Sigma'(f, S) \leq \Sigma'(f, T) \qquad \text{e} \qquad \Sigma''(f, S) \geq \Sigma''(f, T).$$

E' facile capire queste relazioni nel caso in cui T si ottiene da S aggiungendo un punto di suddivisione ξ: il risultato generale discende da questo, aggiungendo un punto alla volta. Se $S = \{a, x_1, b\}$ e $T = \{a, x_1, \xi, b\}$ si ha per le somme inferiori quanto mostrato in figura. Dunque "raffinando" la suddivisione di $[a, b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.



5. Poniamo

$$\mathcal{I}'(f) = \sup_S \Sigma'(f, S) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}''(f) = \inf_S \Sigma''(f, S).$$

I numeri reali $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$ si dicono rispettivamente **integrale inferiore** e **integrale superiore** di f su $[a, b]$.

Abbiamo immediatamente la disuguaglianza $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$.

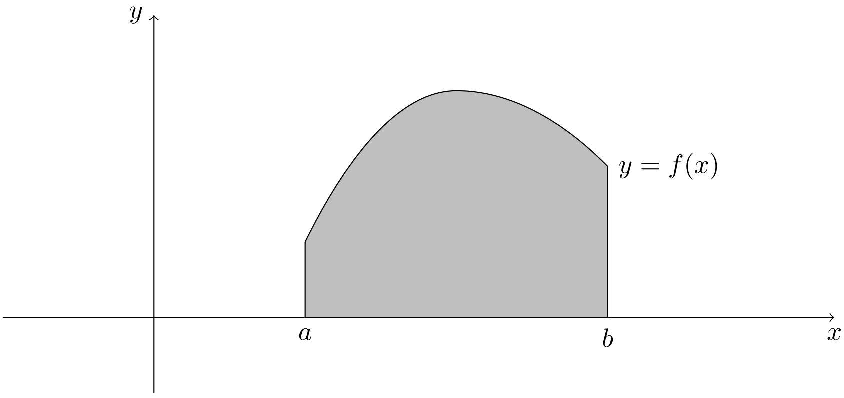
6. Possiamo ora dare la definizione di integrabilità nel senso di Riemann.

Definizione 7.1 (Integrabilità secondo Riemann). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann se $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Tale valore si dice l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ e si indica con i simboli*

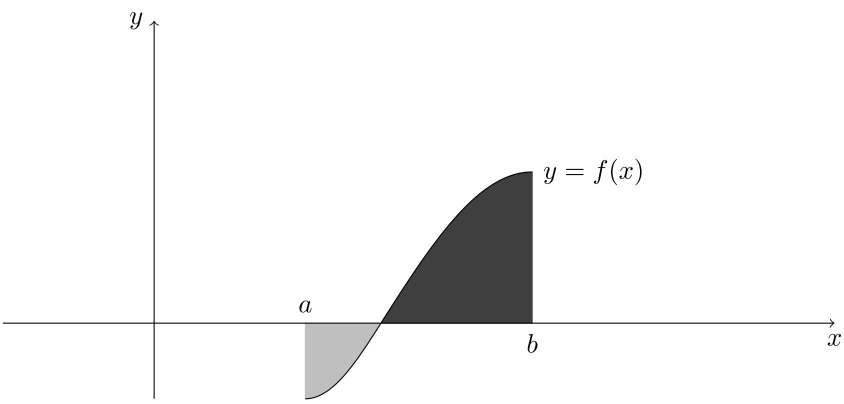
$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \textit{oppure} \qquad \int_a^b f\, dx,$$

Poiché in questo corso useremo solo l'integrazione secondo Riemann, ometteremo di indicare che l'integrabilità è intesa nel senso di Riemann.

Osservazione 7.2 (Interpretazione geometrica). Se f è positiva, $\int_a^b f(x)\, dx$ può interpretarsi come l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di f.



Nel caso in cui $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\, dx$ rappresenta l'area tra f e l'asse delle ascisse ma con il segno negativo. Se f cambia segno sull'intervallo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\, dx$ tiene conto del "bilanciamento" tra le aree positive e quelle negative.



7. La seguente proposizione contiene una caratterizzazione della classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 7.3 (Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione S_ε di $[a, b]$ tale che*

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile, cioè che si abbia $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Sia $\varepsilon > 0$. Possiamo trovare due suddivisioni T_1 e T_2 di $[a, b]$ tali che

$$\mathcal{I}'(f) < \Sigma'(f, T_1) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, T_2) < \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando la suddivisione $S_\varepsilon = T_1 \cup T_2$ si ha

$$\mathcal{I}'(f) < \Sigma'(f, S_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, S_\varepsilon) < \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Otteniamo

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) < \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \mathcal{I}'(f) + \frac{\varepsilon}{2} < \Sigma'(f, S_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dunque S_ε è la suddivisione cercata.
Viceversa supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una suddivisione S_ε di $[a, b]$ tale che

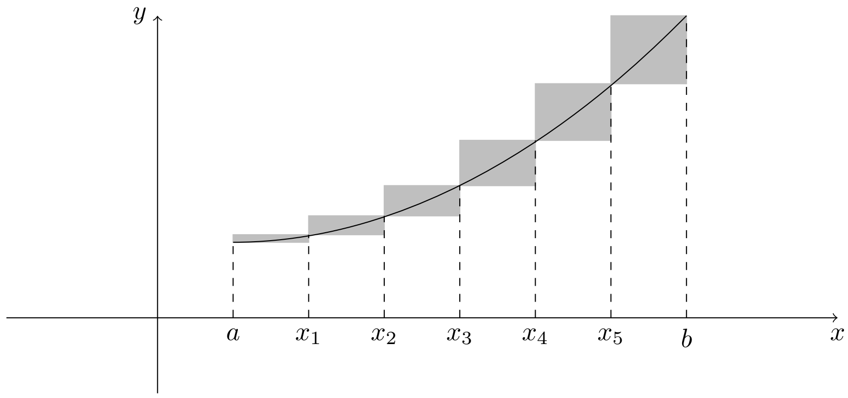
$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Allora si ha

$$\mathcal{I}''(f) \le \Sigma''(f, S_\varepsilon) < \Sigma'(f, S_\varepsilon) + \varepsilon \le \mathcal{I}'(f) + \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario, si ha $\mathcal{I}''(f) \le \mathcal{I}'(f)$. Poiché è sempre $\mathcal{I}'(f) \le \mathcal{I}''(f)$, si ottiene $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, cioè f è integrabile. ∎

Osservazione 7.4. Geometricamente possiamo interpretare il risultato in questo modo: f è integrabile se e solo se il suo grafico può ricoprirsi con un numero finito di rettangoli associati ad una suddivisione la somma delle cui aree è piccola a piacere.



Osservazione 7.5. Sia S_ε una suddivisione di $[a,b]$ tale che valga (7.2), e sia

$$\Sigma = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

una somma di Riemann associata a S_ε. Dalle disuguaglianze

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

e

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

ricaviamo la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \Sigma \right| < \varepsilon. \tag{7.3}$$

Dunque una qualsiasi somma di Riemann relativa a S_ε fornisce una buona approssimazione dell'integrale di f su $[a,b]$.

7.3 Classi di funzioni integrabili

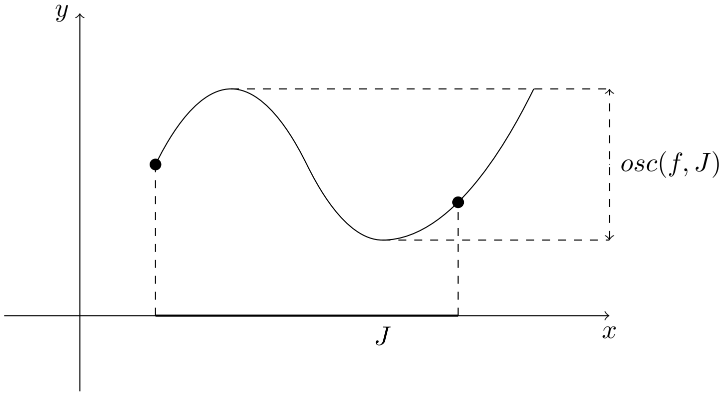
In questa sezione vediamo che la classe di funzioni integrabili è molto ampia, tanto da coprire essenzialmente tutte le funzioni interessanti nelle applicazioni.

1. Poniamo la seguente definizione.

   Definizione 7.6 (Oscillazione). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni intervallo $J \subseteq I$ poniamo*

   $$osc(f, J) := \sup_J f - \inf_J f.$$

   Diciamo $osc(f,J)$ l'oscillazione di f sull'intervallo J.



Vale il seguente risultato.

Teorema 7.7 (Heine). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\ell > 0$ tale che per ogni intervallo $J \subseteq [a, b]$ di lunghezza minore di ℓ si ha*

$$osc(f, J) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\ell > 0$ possiamo trovare un intervallo J_ℓ di lunghezza minore di ℓ con

$$osc(f, J_\ell) \geq \varepsilon.$$

Scegliamo $\ell = \frac{1}{n}$ con $n \geq 1$ e indichiamo con J_n l'intervallo associato. Sia poi $x_n \in J_n$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esistono (x_{n_k}) sottosuccessione di (x_n) e $x_0 \in [a, b]$ con $x_{n_k} \to x_0$. Grazie alla continuità di f in x_0, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (e $x \in [a, b]$) si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notiamo che per k grande si ha $J_{n_k} \subseteq]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Se dunque $y, z \in J_{n_k}$ si ha

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(z)| < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

e dunque (passando al sup in y e all'inf in z)

$$osc(f, J_{n_k}) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$$

che contraddice l'ipotesi $osc(f, J_n) \geq \varepsilon$. □

2. Ritorniamo alla questione dell'integrabilità di una funzione. È conveniente scrivere la differenza tra una somma superiore ed una somma inferiore nel seguente modo

$$\begin{aligned}\Sigma''(f, S) - \Sigma'(f, S) &= \sum_{j=0}^{n} \Big[\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f \Big] (x_{j+1} - x_j) - \sum_{j=0}^{n} \Big[\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \Big] (x_{j+1} - x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \Big[\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f - \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \Big] (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n} osc(f, [x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j).\end{aligned}$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 7.8 (Integrabilità delle funzioni continue). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Dividiamo $[a, b]$ in n-intervalli uguali con n così grande che su ogni sottointervallo $[x_j, x_{j+1}]$ della suddivisione S associata si abbia

$$osc(f, [x_j, x_{j+1}]) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ciò è possibile essendo f continua per il teorema di Heine. Si ha allora vista la riscrittura di $\Sigma''(f, S) - \Sigma'(f, S)$ in termini di oscillazione

$$\begin{aligned}\Sigma''(f, S) - \Sigma'(f, S) &= \sum_j osc(f, [x_j, x_{j+1}])(x_{j+1} - x_j) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_j (x_{j+1} - x_j) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dunque f soddisfa alla condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità . □

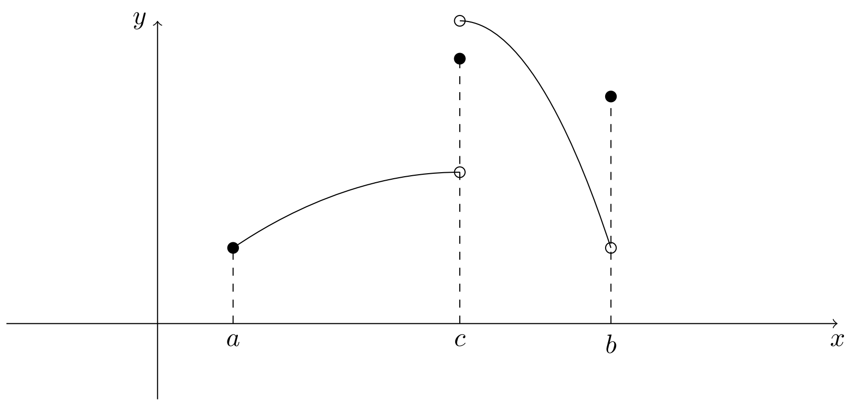
Osservazione 7.9. In termini geometrici, possiamo dire che il grafico di $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua può ricoprirsi con un numero finito di rettangoli associati ad una suddivisione la somma delle cui aree è piccola a piacere.

3. Siamo però interessati ad integrare anche funzioni discontinue (come nell'esempio del calcolo della massa). Una classe di funzioni discontinue molto utili nelle applicazioni sono le funzioni **continue a tratti**.

Definizione 7.10 (Funzioni continue a tratti). *Diciamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti*

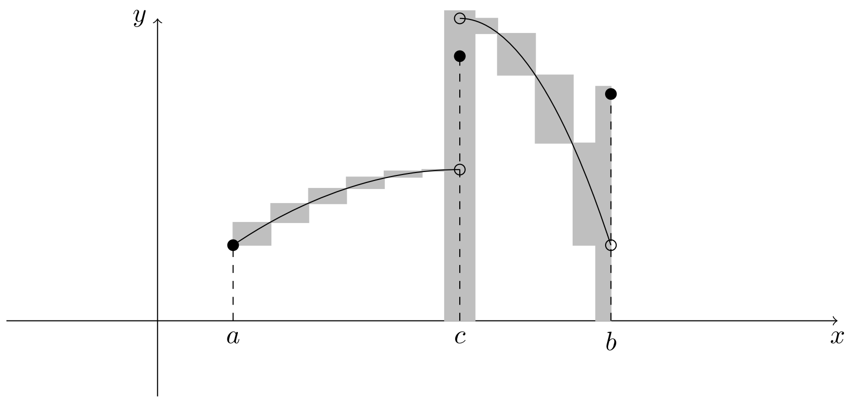
$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_{j+1}^-} f(x).$$

Un grafico tipico di funzioni continue a tratti è il seguente.



Poiché il grafico delle funzioni continue a tratti è contenuto nell'unione di un numero finito di grafici di funzioni continue e di un insieme finito di punti, l'integrabilità delle funzioni continue implica immediatamente il seguente risultato.

Teorema 7.11 (Integrabilità delle funzioni continue a tratti). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua a tratti. Allora f è integrabile.*



Osservazione 7.12 (Funzione di Dirichlet). Non tutte le funzioni limitate sono integrabili. Ad esempio non lo è la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

poiché $\mathcal{I}'(f) = 0$ e $\mathcal{I}''(f) = 1$. f è detta *funzione di Dirichlet.*

7.4 Proprietà dell'integrale

Vediamo ora alcune proprietà del calcolo integrale molto utili nelle applicazioni.

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzione integrabili, e siano $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$. Si può innanzitutto dimostrare che le funzioni

$$f + g, \qquad \lambda f, \qquad |f|$$

e la restrizione di f a qualsiasi sottointervallo sono a loro volta integrabili. Inoltre valgono le seguenti proprietà .

   (a) **Linearità** : per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx;$$

(b) **Confronto**: se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx;$$

(c) **Suddivisione**: se $c \in]a, b[$

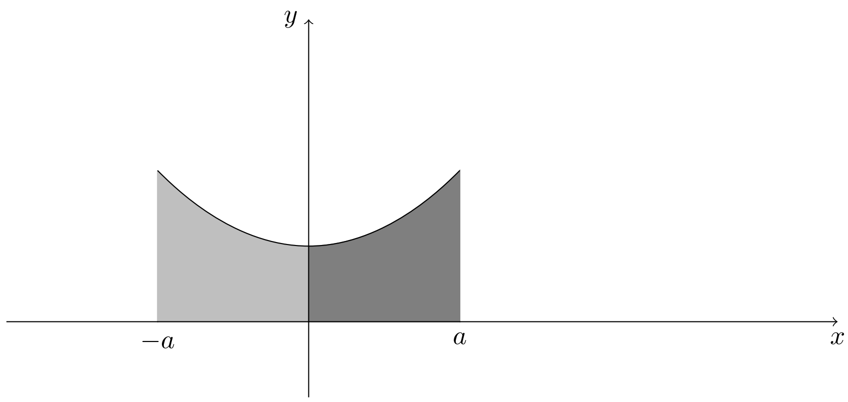
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

(d) **Confronto con il modulo**:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

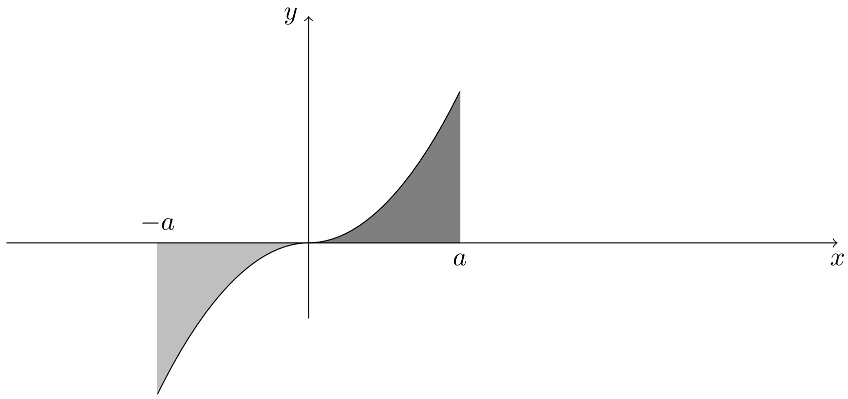
2. Se la funzione f è definita su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, cioè del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$, e f possiede particolari **simmetrie**, esse si riflettono sul calcolo dell'integrale. Se $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ è una funzione **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$), allora

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$



Se invece f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$) si ha

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$



7.5 La media integrale

L'integrale può essere usato per fornire una generalizzazione del concetto di media per grandezze che variano.

1. Per capire il collegamento tra l'integrale ed il concetto di media, torniamo al caso delle funzioni continue. Abbiamo visto che esse sono integrabili considerando la suddivisione S di $[a, b]$ in n intervalli uguali di ampiezza $(b - a)/n$ e vedendo che relativamente ad essa, somma inferiore e somma superiore si scostano di una quantità sempre più piccola al crescere di n. Scegliamo un punto ξ_i qualsiasi all'interno dell'i-esimo intervallo: per definizione di somma inferiore e superiore abbiamo la disuguaglianza

$$\Sigma'(f, S) \leq f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n} \leq \Sigma''(f, S).$$

Poiché $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$ sono sempre più vicini tra loro e vicini all'integrale di f al crescere di n, concludiamo che per n sempre più grande la quantità

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n}(b - a) \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

e cioè

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n} \approx \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dunque l'integrale di f diviso per $b - a$ rappresenta una sorta di media aritmetica dei valori della f (i valori di f sono infiniti, noi abbiamo operato in un certo senso un campionamento).

2. In base a quanto visto, siamo portati a dare la seguente definizione.

Definizione 7.13 (Media integrale). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Diciamo media integrale di f su $[a,b]$ il valore*

$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Osservazione 7.14. Scrivendo la relazione precedente nella forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = M_f(b-a),$$

deduciamo che M_f ha il seguente significato geometrico: tenendo conto della convenzione sui segni sulle aree, l'area associata al grafico di f è equivalente ad un rettangolo di base $b-a$ e altezza M_f.

Osservazione 7.15. Notiamo che

$$\inf_{[a,b]} f \le M_f \le \sup_{[a,b]} f.$$

Infatti dalla disuguaglianza

$$\inf_{[a,b]} f \le f(x) \le \sup_{[a,b]} f, \qquad x \in [a,b]$$

otteniamo per confronto

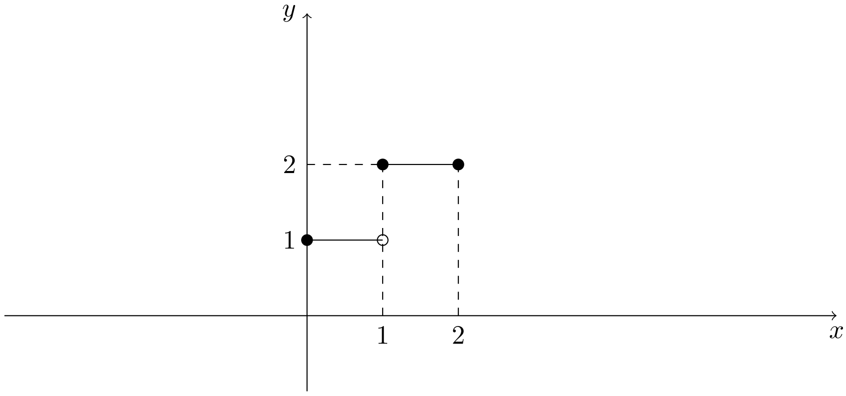
$$\int_a^b \inf_{[a,b]} f\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \sup_{[a,b]} f\,dx$$

da cui

$$[\inf_{[a,b]} f](b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le [\sup_{[a,b]} f](b-a).$$

Dividendo per $(b-a)$ si ha la tesi.

Osservazione 7.16. Bisogna notare che se f è discontinua, il valore M_f è un valore medio in un senso molto debole. Non è detto infatti che esista $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = M_f$: in altre parole M_f potrebbe non essere mai assunto dalla funzione. Questa situazione capita ad esempio per la funzione riportata in figura:



Si ha infatti $M_f = 3/2$, ed f assume solo i valori 1 e 2.

3. Nel caso delle funzioni continue, la media integrale M_f, oltre a rappresentare un limite di medie aritmetiche dei valori di f come mostrato sopra, è effettivamente un valore assunto da f.

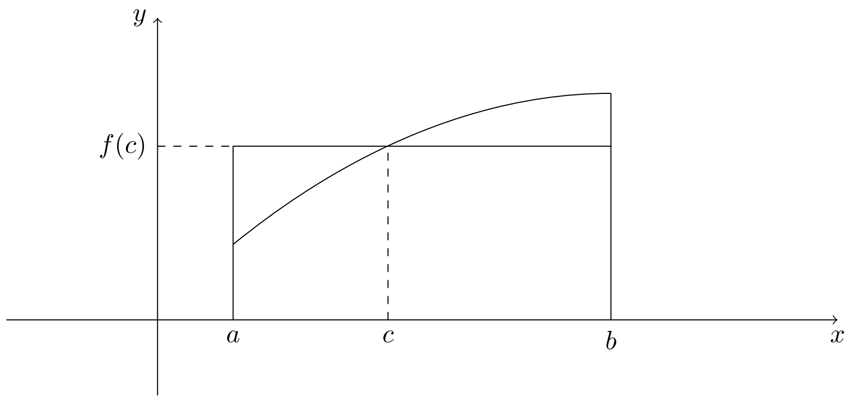
Teorema 7.17 (Teorema della media). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$ e cioè*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Dimostrazione. Detti m e M il minimo e il massimo di f su $[a, b]$, dall'Osservazione 7.15 e dal Teorema di Weierstrass, abbiamo

$$m \leq M_f \leq M.$$

Per il teorema dei valori intermedi si ha che esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, ed il teorema è così dimostrato. ■



7.6 I teoremi fondamentali del calcolo

In questa sezione collegheremo il problema dell'integrazione al problema del calcolo della primitiva di una funzione: in ciò consistono i teoremi fondamentali del calcolo.

7.6.1 Il problema della primitiva

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 7.18 (Primitiva). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $F : I \to \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è una primitiva di f su I se F è derivabile su I e si ha*

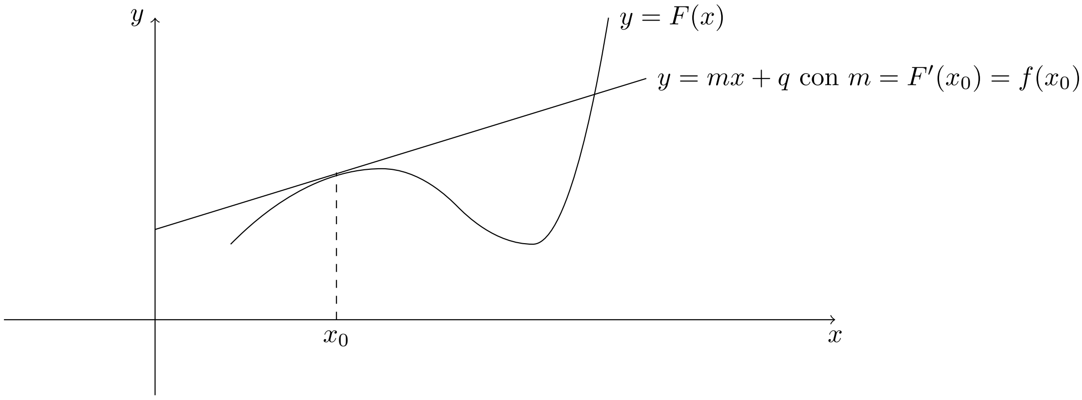
$$\forall x \in I \, : \, F'(x) = f(x).$$

Ad esempio, $F(x) = x^2$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $f(x) = 2x$, così come $G(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $g(x) = \cos(2x)$.

1. L'insieme delle primitive di f (se esistono) si usa indicare con il simbolo

$$\int f(x)\, dx;$$

la scelta del simbolo già anticipa il legame con il problema dell'integrazione. Geometricamente, una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni $x_0 \in I$ la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.



2. Il problema delle primitive può enunciarsi così :

Problema della primitiva: *determinare l'insieme di tutte le primitive su I della funzione $f : I \to \mathbb{R}$.*

Tale problema non è affatto semplice: innanzitutto f potrebbe non ammettere primitive (vedi gli esercizi per un esempio esplicito); oppure potrebbe ammetterne, ma esse non risultano facili da calcolare esplicitamente. Una cosa che possiamo facilmente notare è che se f ammette una primitiva F, allora anche $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f: infatti derivando si ha che la costante sparisce, così che

$$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x).$$

Su un intervallo I, questo è l'unico modo di costruire nuove primitive.

Proposizione 7.19 (Struttura dell'insieme delle primitive su un intervallo). *Sia F una primitiva di f sull'intervallo I. Allora*

$$\int f(x)\,dx = \{F + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}$$

cioè ogni altra primitiva $\tilde{F}$ di f è del tipo $F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se infatti $\tilde{F}$ è un'altra primitiva di f, si ha $\tilde{F}' = F'$, da cui

$$(\tilde{F} - F)' = 0.$$

Per il Teorema della derivata nulla si ha $\tilde{F} = F + c$ con $c \in \mathbb{R}$. □

Osservazione 7.20. Possiamo dire che le primitive di f su un intervallo differiscono per una costante. Dunque per trovare tutte le primitive di una funzione su un intervallo, basta determinarne una.

3. Per formulare i teoremi fondamentali del calcolo, abbiamo bisogno delle seguenti convenzioni sui segni. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e se $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$, poniamo

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Anche con questa convenzione abbiamo che per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx,$$

cioè vale ancora una formula di suddivisione per l'integrale.

7.6.2 Il primo teorema fondamentale del calcolo

Possiamo enunciare ora il primo teorema fondamentale del calcolo.

Teorema 7.21 (Primo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $A : I \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

dove $a \in I$. Allora A è derivabile su I con $A' = f$.

In particolare, l'insieme delle primitive di f su I è dato da

$$\int f(x)\,dx = \{A(x) + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrazione. Notiamo che la funzione A è ben definita essendo f continua e dunque integrabile sull'intervallo di estremi a e x (con eventualmente la convenzione sui segni se $x < a$). La derivata di A in $x_0 \in I$ è data dal limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}.$$

Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} A(x) - A(x_0) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se $x > x_0$, per il teorema della media esiste $\xi_x \in [x_0, x]$ tale che

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\xi_x)(x - x_0).$$

Se $x < x_0$, per la convenzione sui segni si ha

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = -\int_x^{x_0} f(t)\,dt$$

così che per il teorema della media esiste $\xi_x \in [x, x_0]$ tale che

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = -f(\xi_x)(x_0 - x) = f(\xi_x)(x - x_0).$$

Concludiamo che per ogni x (maggiore o minore di x_0) esiste ξ_x appartenente all'intervallo determinato da x_0 e x tale che

$$A(x) - A(x_0) = f(\xi_x)(x - x_0)$$

e cioè

$$\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x).$$

Facciamo ora tendere $x \to x_0$: si ha $\xi_x \to x_0$, ed essendo f continua $f(\xi_x) \to f(x_0)$. Dunque si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

cioè A è una primitiva di f.

Essendo I un intervallo, abbiamo che ogni altra primitiva si ottiene da $A(x)$ sommando una costante. Dunque

$$\int f(x)\,dx = \{A(x) + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}$$

e la dimostrazione è conclusa.

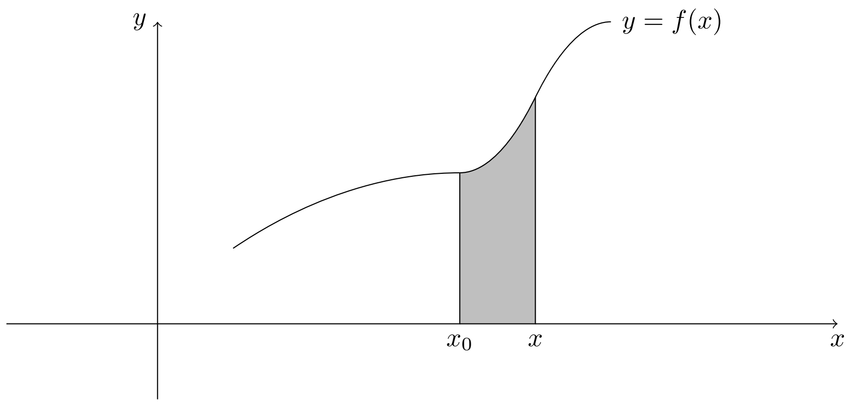
■

Osservazione 7.22. Possiamo dire che il problema della primitiva per $f : I \to \mathbb{R}$ continua si risolve tramite la teoria dell'integrazione (determinazione di $A(x)$).

Osservazione 7.23. Il risultato del primo teorema fondamentale del calcolo può essere capito tramite il seguente ragionamento geometrico: la quantità

$$A(x) - A(x_0)$$

rappresenta l'area della regione R_x determinata da f sull'intervallo $[x_0, x]$.



R_x è un poligono con un lato curvilineo, quello relativo al grafico di f che congiunge i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$: essendo f continua, per $(x - x_0)$ piccolo il lato curvilineo differisce poco da quello orizzontale ad altezza $f(x_0)$. L'area di R_x è dunque approssimativamente quella del rettangolo di base $[x_0, x]$ e altezza $f(x_0)$, e tale approssimazione è sempre migliore al tendere di x a x_0. Ricaviamo

$$A(x) - A(x_0) \approx f(x_0)(x - x_0)$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = A'(x_0) = f(x_0)$$

Questo ragionamento intuitivo mostra che il risultato del teorema è valido nella sola ipotesi della continuità di f in x_0: per questo si vedano gli Esercizi.

7.6.3 Il secondo teorema fondamentale del calcolo

Guardiamo ora il legame tra primitiva ed integrazione osservato al punto precedente nel senso opposto. Di questo si occupa il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo.

Teorema 7.24 (Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se F è una primitiva di f su I, allora per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione. Grazie al Primo Teorema Fondamentale del calcolo, sappiamo che, considerata la funzione area

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

l'insieme delle primitive di f su I è dato da

$$\{A(x) + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Si ha dunque

$$F(x) = A(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c,$$

dove c è una costante opportuna.

Se scegliamo $x = a$, si ottiene

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = c$$

e cioè $c = F(a)$. Si ha dunque

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a).$$

Sostituendo $x = b$ si ha

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$$

da cui

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

■

Osservazione 7.25. Si scrive spesso $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ così che la conclusione del teorema si scrive

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,.$$

Osservazione 7.26. Possiamo dire che il procedimento di integrazione di una funzione continua f si può risolvere tramite la determinazione di una primitiva. Vediamo alcuni esempi.

1. Calcolare $\int_1^5 x^3\,dx$. Una primitiva su $\mathbb{R}$ di $f(x) = x^3$ è $F(x) = \frac{x^4}{4}$ poiché

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}4x^3 = x^3.$$

Dunque

$$\int_1^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^5 = \frac{5^4 - 1}{4}.$$

2. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx.$$

Una primitiva di $\sin(2x)$ è $-\frac{\cos 2x}{2}$. Dunque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\cos\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Osservazione 7.27. Il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo sposta l'attenzione dalle somme inferiori e superiori al problema di trovare una primitiva. A partire dalle regole di derivazione, bisogna dunque capire cosa succede andando "all'indietro". Il teorema è dunque efficace per risolvere gli integrali se abbiamo un bagaglio sufficientemente ampio di funzioni di cui sappiamo calcolare la primitiva.

Osservazione 7.28. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile con derivata continua, si ha

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

7.7 Formule di integrazione

In questa sezione vediamo due procedimenti di integrazione molto utili nelle applicazioni: l'integrazione per parti e l'integrazione per sostituzione.

7.7.1 Integrazione per parti

L'integrazione per parti riguarda essenzialmente l'integrazione di funzioni che si presentano sotto forma di prodotto.

Proposizione 7.29 (**Calcolo dell'integrale per parti**)**.** *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Dalla derivazione di un prodotto si ha $(fg)' = f'g + fg'$ da cui

$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Per l'ipotesi su f e g, le funzioni che compaiono nella formula sono continue e dunque integrabili. Se integriamo tra a e b, applicando le proprietà dell'integrale ed il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha

$$\int_a^b fg'\,dx = \int_a^b [(fg)' - f'g]\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx - \int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'g\,dx$$

che è la tesi. ∎

Osservazione 7.30. Per applicare l'integrazione per parti occorre decidere quale funzione considerare come f e quale come g: la scelta è dettata dall'*esperienza*. La formula sottintende che il problema del calcolo di una primitiva di $f'g$ debba essere più semplice di quello di partenza fg'.

Esempio 7.31. Consideriamo

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

Scegliendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ si ha $g(x) = e^x$ da cui

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

7.7.2 Integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione consiste essenzialmente in un cambio di variabile, cioè nel passaggio dalla variabile $x \in [a, b]$ ad una nuova variabile, diciamola t, legata ad x dalla relazione

$$x = \varphi(t).$$

Vale il seguente risultato.

Proposizione 7.32 (**Calcolo dell'integrale per sostituzione**)**.** *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : J \to I$ una funzione derivabile con derivata continua. Allora per ogni $c, d \in J$*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Basta tenere presente che per il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha che se F è una primitiva di f allora

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\, dx = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)).$$

D'altro canto la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile con

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

da cui

$$\int_{c}^{d} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)).$$

■

Osservazione 7.33. Se la funzione $\varphi : J \to I$ è anche biettiva, cioè $x = \varphi(t)$ è un vero e proprio *cambiamento di variabile*, si ha allora per ogni $a, b \in I$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Osservazione 7.34. Notiamo che nell'integrazione per sostituzione, passando da x a t occorre cambiare ovviamente gli estremi di integrazione, ma soprattutto la nuova funzione da integrare non è solo $f(\varphi(t))$ ma $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Fare un cambiamento di variabile presuppone che il calcolo della primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ sia più semplice di quello di $f(x)$.

Esempio 7.35. Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\ln 2}^{7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx.$$

Se poniamo $e^x = t$, si ha $x = \ln t$. Scegliamo allora come funzione φ della formula d'integrazione per sostituzione l'applicazione $\varphi(t) = \ln t$ che è invertibile. Si ha

$$x = \ln 2 \Longrightarrow t = e^{\ln 2} = 2$$
$$x = 7 \Longrightarrow t = e^7$$

e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}.$$

Otteniamo

$$\int_{\ln 2}^{7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx = \int_{2}^{e^7} \frac{t^2}{\sqrt{t-1}} \left(\frac{1}{t}\, dt\right) = \int_{2}^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\, dt.$$

Il secondo membro è più facile da integrare. Una primitiva su $]1, +\infty[$ è data da

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \int \left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right) dt = \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}.$$

Dunque si ottiene

$$\int_2^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}\right]_2^{e^7} = \frac{2}{3}(e^7-1)^{3/2} + 2(e^7-1)^{1/2} - \frac{2}{3} - 2.$$

7.8 Integrali impropri

In questa sezione ci occupiamo di estendere la nozione di integrale alle situazione in cui f sia definita su un intervallo illimitato oppure in cui f non è limitata.

1. Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $a < b$. Definiamo l'integrale improprio di f su $[a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

analizzando il limite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7.4}$$

Parleremo di integrali impropri di **prima specie**.

Definizione 7.36 (Integrali impropri di prima specie). *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $a < b$. Se il limite* (7.4) *esiste, poniamo*

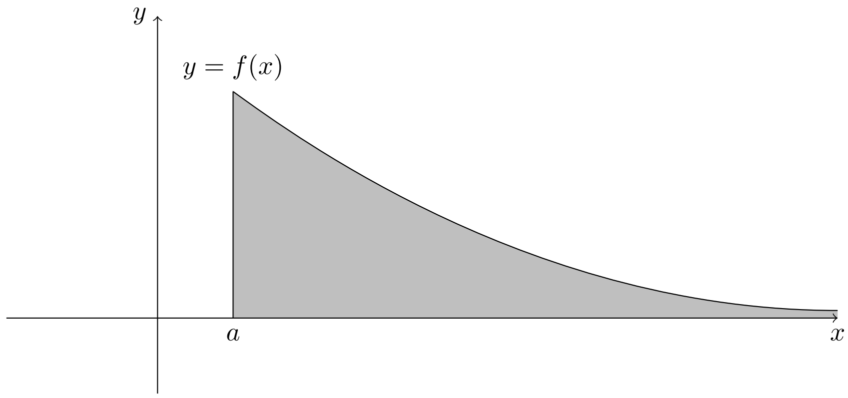
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

(a) Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty[$ o che il suo integrale improprio converge se il limite (7.4) *è finito.*

(b) Diciamo che l'integrale di f diverge positivamente o negativamente se il limite vale $+\infty$ o $-\infty$.

Se il limite (7.4) *non esiste, diciamo che l'integrale improprio di f oscilla.*

Osservazione 7.37. Da un punto di vista geometrico, nel caso di funzioni non negative f, l'integrale improprio di prima specie fornisce la generalizzazione del concetto di area per i sottografici di funzioni definite su intervalli illimitati: l'integrabilità in senso improprio su $[a, +\infty[$ significa che l'area della regione sottesa da f con l'asse x sull'intervallo $[a, +\infty[$ risulta finita.



Esempio 7.38. Abbiamo che l'integrale improprio di $f(x) = e^{-x}$ su $[0, +\infty[$ è convergente poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

Esempio 7.39. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

converge se $\alpha > 1$ e diverge positivamente se $\alpha \leq 1$.

Infatti se $\alpha \neq 1$, si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b = -\frac{1}{1-\alpha} + \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$, ed in tal caso vale $\frac{1}{\alpha-1}$. Se $\alpha = 1$, l'integrale diviene

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} (\ln x) = +\infty$$

cioè l'integrale diverge positivamente.

Osservazione 7.40. Al caso degli integrali impropri di prima specie si possono estendere le usuali proprietà di linearità , confronto, suddivisione e confronto con il modulo visti per le funzioni integrabili secondo Riemann.

Osservazione 7.41. Possiamo utilizzare le idee precedenti per coprire anche altri casi.

(a) Si possono definire in modo analogo gli integrali impropri di funzioni $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\, dx.$$

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, l'integrale improprio di f su $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

può definirsi studiando

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Possiamo riportarci al caso di limiti di una variabile utilizzando la proprietà di suddivisione: essendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

siamo ricondotti allo studio dei limiti

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

se la somma è ben definita, altrimenti diciamo che l'integrale improprio oscilla.

2. Lo studio degli integrali impropri ha molte somiglianze con quello delle serie numeriche. Gli integrali impropri di prima specie sono definiti a partire dalla relazione

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} I(b).$$

Questa ricorda la definizione delle serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = \lim_{k\to+\infty} S_k$$

ed anzi la terminologia associata (converge/diverge/oscilla) è la medesima. Questa uguaglianza di definizioni è anche sostanziale: così come il calcolo esplicito di S_k risulta possibile solo in pochissimi casi, così il calcolo esplicito di $I(b)$ risulta possibile solo nel caso in cui sia nota una primitiva di f.

Come nel caso delle serie numeriche, un integrale improprio è determinato dal limite di una quantità che difficilmente può calcolarsi in modo esplicito. Dunque anche nel caso degli integrali impropri, ci si accontenta in prima istanza di stabilirne il carattere, rinviando ad uno studio successivo (di carattere numerico) l'approssimazione del suo valore (nel caso in cui esso converga). Come nel caso delle serie numeriche, sono disponibili criteri di convergenza.

3. Nel caso in cui la funzione integranda f sia non negativa, valgono per gli integrali impropri criteri di convergenza simili a quelli visti per le serie numeriche a termini non negativi.

Teorema 7.42 (Criteri di convergenza per gli integrali impropri). *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ non negativa ed integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ con $a < b$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

o converge o diverge positivamente.

Sia inoltre $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ un'altra funzione non negativa ed integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ con $a < b$. Valgono i seguenti fatti.

(a) **Criterio del confronto.** *Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Allora*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

In particolare se g è integrabile in senso improprio, anche f lo è . Se invece l'integrale di f diverge, anche quello di g diverge.

(b) **Criterio del confronto asintotico.** *Supponiamo che $g \neq 0$ su $[a, +\infty[$ e che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

esista finito e non nullo. Allora f è integrabile in senso improprio se e solo se anche g lo è .

Esempio 7.43. Consideriamo $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$. Poiché per ogni $x \geq 0$

$$\frac{e^{-x}}{1+x} \leq e^{-x}$$

e

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1,$$

si ha che l'integrale improprio di f su $[0, +\infty[$ è convergente.

Esempio 7.44. Si ha che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\, dx$$

converge se e solo se

$$\begin{cases} \alpha > 1 \text{ e per ogni } \beta \\ \text{o} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1. \end{cases}$$

Se $\alpha > 1$ e $\varepsilon > 0$ è tale che $\alpha > 1 + \varepsilon$, allora esiste $M > 0$ tale che per $x \geq M$ (usando il confronto tra infiniti)

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \leq \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

L'integrale improprio associato alla funzione a secondo membro è convergente (l'esponente è maggiore stretto di 1): per confronto otteniamo che l'integrale di partenza è convergente.

Se $\alpha < 1$ si ha che se $\varepsilon > 0$ è tale che $\alpha < 1 - \varepsilon$ (con $1 - \varepsilon > 0$), allora esiste $M > 0$ tale che per $x \geq M$ si ha

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \geq \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}.$$

L'integrale improprio associato alla funzione a primo membro è divergente (l'esponente è minore stretto di 1): per confronto otteniamo che l'integrale di partenza è divergente.

Se $\alpha = 1$ si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{\ln^{-\beta+1} x}{-\beta + 1} \right]_2^b.$$

Dunque il limite esiste finito se e solo se $\beta > 1$.

Esempio 7.45. Consideriamo

$$\int_1^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right) dx.$$

Notiamo che l'infinitesimo principale di $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ per $x \to +\infty$ è dato da $\frac{1}{x^2}$. Allora l'integrale improprio ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

e risulta pertanto convergente.

4. Nel caso in cui la funzione integranda non abbia un segno definito, è utile la nozione di convergenza assoluta.

Definizione 7.46 (Convergenza assoluta). *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ con $a < b$. Diremo che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge assolutamente se risulta*

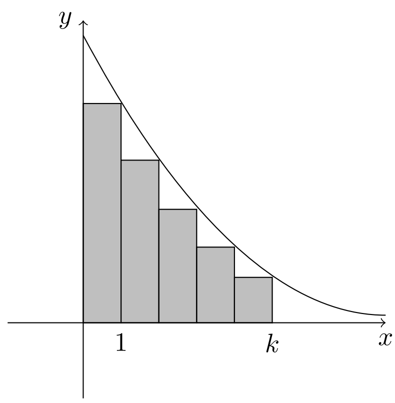
$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

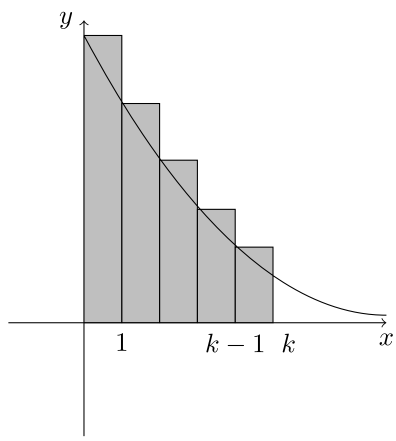
Come nel caso delle serie numeriche, la convergenza tradizionale è spesso detta convergenza semplice per distinguerla dalla convergenza assoluta.

Proposizione 7.47 (Convergenza assoluta implica convergenza semplice). *Se un integrale improprio converge assolutamente, allora risulta convergente.*

5. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente. Si ha immediatamente la seguente disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{k} f(n) \leq \int_0^k f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{k-1} f(n).$$





Deduciamo allora il seguente risultato.

Proposizione 7.48 (Integrali impropri e serie numeriche). *Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente. Allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

In particolare l'integrale improprio e la serie hanno lo stesso carattere.

Osservazione 7.49 (Carattere della serie armonica generalizzata). In base al risultato precedente abbiamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

ha lo stesso carattere dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Grazie all'Esempio 7.39, la serie risulta dunque convergente se e solo se $\alpha > 1$. In particolare per $\alpha = 1$ deduciamo che la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

Osservazione 7.50. In base al risultato precedente e all'Esempio 7.44 abbiamo più in generale che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

converge se e solo se converge l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\, dx.$$

Dunque si ha dunque convergenza se e solo se $\alpha > 1$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ oppure $\alpha = 1$ con $\beta > 1$.

6. Le considerazioni viste per gli integrali su domini illimitati possono utilizzarsi per estendere il concetto di integrale a funzioni illimitate su intervalli limitati.

Definizione 7.51 (Integrali impropri di seconda specie). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione illimitata e integrabile su ogni intervallo del tipo $[a + \varepsilon, b]$ con $\varepsilon > 0$. Poniamo*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$$

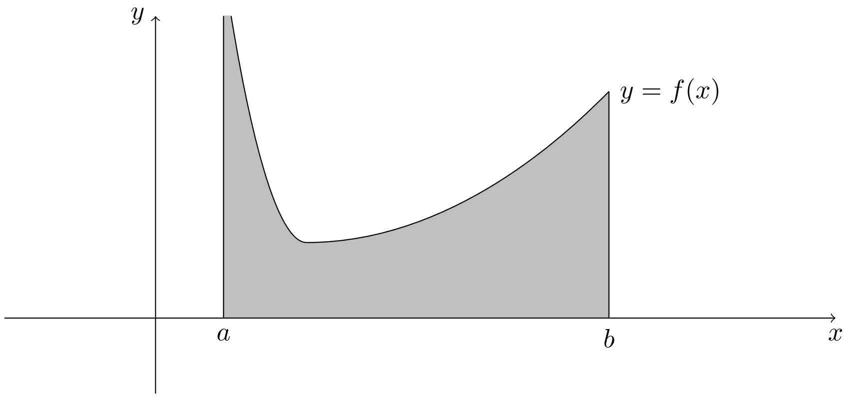
se il limite esiste.

(a) Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $]a, b]$ o che il suo integrale improprio converge se il limite è finito.

(b) Diciamo che l'integrale improprio di f diverge positivamente o negativamente se tale limite vale $+\infty$ o $-\infty$.

Se il limite non esiste, diciamo che l'integrale improprio oscilla.

Osservazione 7.52. Da un punto di vista geometrico, l'integrale improprio di seconda specie fornisce la generalizzazione del concetto di area per i sottografici di funzioni con asintoti verticali. Se $f \geq 0$, l'integrabilità in senso improprio su $]a, b]$ significa che l'area della regione sottesa da f con l'asse x sull'intervallo $]a, b]$ risulta finita.



Osservazione 7.53. Chiaramente valgono discorsi analoghi ai precedenti se $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ si presenta illimitata in un intorno di b: si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

se il limite esiste, altrimenti diciamo che l'integrale improprio oscilla.

Se poi $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è illimitata vicino ad a e b, poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

se la somma è ben definita ($c \in]a, b[$), altrimenti diciamo che l'integrale di f oscilla.

Esempio 7.54. Consideriamo l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ con $\alpha > 0$. Se $\alpha \neq 1$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$, ed in tal caso vale $\frac{1}{1-\alpha}$. Se $\alpha = 1$, l'integrale diviene

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}(-\ln \varepsilon) = +\infty$$

cioè l'integrale diverge positivamente.

Esempio 7.55. Sia $a < b < a + 1$: con ragionamenti analoghi a quelli dell'Esempio 7.44 si ha che

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha |\ln(x-a)|^\beta}\,dx$$

converge se e solo se

$$\begin{cases} \alpha < 1 \text{ e per ogni } \beta \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1. \end{cases}$$

Una combinazione degli integrali di prima e seconda specie porta agli integrali di terza specie.

Definizione 7.56 (Integrali di terza specie). *Sia* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *integrabile su* $]a+\varepsilon, b[$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e* $b < +\infty$*. Poniamo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

se la somma è ben definita. In caso contrario, diciamo che l'integrale improprio di f *oscilla.*

Osservazione 7.57. Al caso degli integrali impropri di seconda e terza specie si possono estendere le proprietà viste per gli integrali di prima specie: in particolare per funzioni non negative si hanno i criteri di convergenza del confronto e del confronto asintotico.

Esercizi

1. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili: dimostrare che $f + g$ è integrabile. (Suggerimento: mostrare che $\mathcal{I}'(f + g) \geq \mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g)$ e che $\mathcal{I}''(f + g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)$).

2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$: dimostrare che λf è integrabile. (Suggerimento: considera prima il caso $\lambda \geq 0$ e prova che $\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}''(f)$).

3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Dimostrare che $|f|$ è integrabile.

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Dimostrare che f^2 è integrabile.

5. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Dimostrare che fg è integrabile. (Suggerimento: ricorda che $4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$).

6. Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, $c \in [a, b]$ e $d \in \mathbb{R}$. Dimostrare che
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq c \\ d & \text{se } x = c \end{cases}$$
è integrabile e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. (Suggerimento: vedi che $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'(g)$).

7. Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dimostrare che F è continua.

8. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
non ammette primitive su $\mathbb{R}$.

9. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e continua in $x_0 \in]a, b[$. Sia $c \in [a, b]$ e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt.$$
Dimostrare che F è derivabile in x_0 e che $F'(x_0) = f(x_0)$. (Suggerimento: cerca di seguire la dimostrazione geometrica del Primo Teorema Fondamentale del Calcolo.)

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Verificare che F non è derivabile in $x = 0$, ma ammette derivate destra e sinistra pari rispettivamente a 1 e -1.

11. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia $x_0 \in]a, b[$ tale che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$. Dimostrare che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile da destra in x_0 e che la derivata destra vale l.

12. Dimostrare che la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua a tratti, ma è integrabile su $[-1, 1]$. (Suggerimento: dividi $[-1, 1]$ negli intervalli $[-1, -\varepsilon]$, $[-\varepsilon, \varepsilon]$ e $[\varepsilon, 1]$...).

13. Si consideri la funzione di Riemann

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ con } m, n \text{ primi tra loro} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dimostrare che f è discontinua in tutti i punti razionali e continua in tutti i punti irrazionali. Dimostrare che f è integrabile su un qualsiasi intervallo $[a, b]$ e che $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.