Capitolo 4

Funzioni continue e limiti

In questo capitolo definiremo la nozione di funzione continua e ne studieremo le proprietà fondamentali. Introdurremo inoltre l'operazione fondamentale dell'analisi infinitesimale, la nozione di limite di una funzione.

4.1 Intorni

Per affrontare lo studio della continuità e dei limiti di funzioni di una variabile, è opportuno introdurre la nozione di intorno di un punto in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 4.1 (Intorno di un punto). *Siano $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.*

(a) Se $x_0 \in \mathbb{R}$, diciamo che U è intorno di x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq U$.

(b) Se $x_0 = +\infty$, diciamo che U è intorno di $+\infty$ se esiste $M > 0$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$.

(c) Se $x_0 = -\infty$, diciamo che U è intorno di $-\infty$ se esiste $M > 0$ tale che $[-\infty, -M[\subseteq U$.

Il seguente lemma contiene alcune proprietà degli intorni che utilizzeremo in seguito.

Lemma 4.2 (Proprietà degli intorni). *Valgono i seguenti fatti.*

(a) Per ogni intorno U di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, esiste I intervallo tale che I è intorno di x_0 e $I \subseteq U$.

(b) Se $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ con $x_1 < x_2$, allora esistono un intorno U_1 di x_1 ed un intorno U_2 di x_2 tali che per ogni $a \in U_1$ e $b \in U_2$ si ha

$$a < b.$$

In particolare

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

(c) Se U_1, U_2 sono due intorni di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $U_1 \cap U_2$ è intorno di x_0.

(d) *Se $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ sono tali che la somma $x_1 + x_2$ sia ben definita, allora per ogni intorno U di $x_1 + x_2$ esistono un intorno U_1 di x_1 ed un intorno U_2 di x_2 tali che per ogni $a \in U_1$ e $b \in U_2$ si ha che $a + b$ è ben definito e*

$$a + b \in U.$$

(e) *Se $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ sono tali che il prodotto $x_1 x_2$ sia ben definito, allora per ogni intorno U di $x_1 x_2$ esistono un intorno U_1 di x_1 ed un intorno U_2 di x_2 tali che per ogni $a \in U_1$ e $b \in U_2$ si ha che ab è ben definito e*

$$ab \in U.$$

Osservazione 4.3. Le proprietà (d) e (e) non possono sussistere per somme del tipo $+\infty + (-\infty)$ o prodotti del tipo $0 \cdot (+\infty)$, qualsiasi valore si conviene che esse valgano. Se ad esempio si ponesse $+\infty + (-\infty) = 0$, scegliendo ad esempio $U =]-1, 1[$, non esistono intorni U_1 e U_2 di $+\infty$ e $-\infty$ che soddisfano la conclusione.

4.2 Funzioni continue

Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in E$.

1. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 4.4 (Continuità). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ e $f : E \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è continua in x_0 se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che*

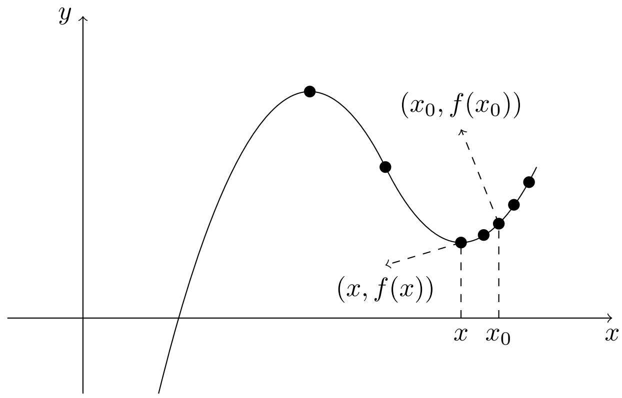
$$\forall x \in U \cap E \,:\, f(x) \in V.$$

Diremo che f è continua su E se f è continua in ogni $x_0 \in E$.

Osservazione 4.5 (Interpretazioni geometrica e analitica della continuità). Possiamo interpretare la continuità di f in $x_0 \in E$ nei seguenti modi.

(a) Da un punto di vista analitico, possiamo dire che $f(x)$ è *prossimo* a $f(x_0)$ se x è *vicino* a x_0, cioè a *piccole variazioni* della variabile x vicino a x_0 corrispondono *piccole variazioni* della funzione.

(b) Da un punto di vista geometrico, possiamo dire che all'avvicinarsi di $x \in E$ a x_0, il punto $(x, f(x))$ sul grafico di f si approssima sempre più al punto $(x_0, f(x_0))$.



2. La continuità delle funzioni è una proprietà stabile rispetto alle operazioni elementari di somma, prodotto e composizione.

Proposizione 4.6 (Stabilità della continuità). *Valgono i seguenti fatti.*

(a) **Stabilità rispetto a somma/differenza/prodotto/quoziente.** *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ e $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni. Se f e g sono continue in x_0, allora risultano continue in x_0 anche le funzioni $f + g$, $f - g$, fg e f/g (in quest'ultimo caso deve essere $g \neq 0$ su E).*

(b) **Stabilità per composizione.** *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(E) \subseteq F$. Sia $x_0 \in E$ tale che f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.*

3. La nozione di continuità può riformularsi in modo classico nel seguente modo.

Proposizione 4.7 (Proprietà (ε, δ)). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Allora f è continua in x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in E : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0. Dato $\varepsilon > 0$, consideriamo l'intorno di $f(x_0)$

$$V :=]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[.$$

Per la definizione di continuità , esiste U intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap E$ si ha $f(x) \in V$. Scegliamo $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq U$. Allora per ogni $x \in E$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) \in V$, cioè $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, così che la proprietà è verificata.

Supponiamo viceversa che la proprietà sia verificata. Consideriamo V intorno di $f(x_0)$. Esiste $\varepsilon > 0$ con

$$]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subseteq V.$$

Sia $\delta > 0$ il numero associato a ε: ponendo $U :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si ha subito che se $x \in U \cap E$

$$f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subseteq V$$

cioè f è continua in x_0. $\square$

4. Si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.8 (**Continuità delle funzioni elementari**)**.** *Le funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali fratte, funzione modulo, potenza α-esima, radice n-esima, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni circolari e quelle iperboliche) sono continue nel loro dominio di definizione.*

Osservazione 4.9. Notiamo che la funzione reciproco

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

è una funzione continua essendo razionale fratta. In particolare la stabilità della continuità rispetto al quoziente può motivarsi alternativamente notando che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot h(g(x))$$

e utilizzando la stabilità rispetto a prodotto e composizione.

Osservazione 4.10. La continuità delle funzioni elementari, insieme con la stabilità della proprietà di continuità (rispetto a somma/differenza/prodotto/quoziente e composizione), permette di dimostrare agevolmente la continuità (nel loro dominio di definizione) di molte funzioni che si incontrano nelle applicazioni. Ad esempio è continua su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(1 + |x|) \cos x^2}{x + 1}.$$

4.3 Limiti delle funzioni

Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. La nozione di limite codifica il comportamento di f vicino ai punti di *accumulazione* di E; se tali punti non appartengono ad E, la nozione di limite permette, in un certo senso, di calcolare f anche dove essa non è definita, assegnandole un valore che ne riassume l'andamento asintotico.

1. Il concetto di punto di accumulazione è alla base della formulazione della teoria dei limiti.

Definizione 4.11 (Punto di accumulazione). *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x_0 è di accumulazione per E se per ogni intorno U di x_0 si ha*

$$U \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Osservazione 4.12. Geometricamente, x_0 è d'accumulazione per E se esistono punti di E diversi da x_0 ed arbitrariamente vicini ad esso.

Esempio 4.13. Il punto -1 è d'accumulazione per $E = [-1, +\infty[$: infatti per ogni $\delta > 0$ si ha che

$$]-1-\delta, -1+\delta[\cap]-1, +\infty[\neq \emptyset.$$

Invece il punto -2 non è d'accumulazione per E: infatti si ha che

$$\left]-2-\frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2}\right[\cap E = \emptyset.$$

Infine $+\infty$ è d'accumulazione per $\mathbb{N}$ ma non per $E = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$.

Osservazione 4.14. Notiamo che se x_0 è d'accumulazione per E, allora può essere che $x_0 \notin E$: ad esempio 0 è d'accumulazione per $]0, 1]$ ma $0 \notin]0, 1]$.

Osservazione 4.15. È facile vedere che gli insiemi con un numero finito di elementi non posseggono punti di accumulazione. Questo non accade per gli insiemi infiniti: si può dimostrare infatti che *ogni insieme con un numero infinito di elementi ammette almeno un punto di accumulazione.*

2. La definizione di limite è la seguente.

Definizione 4.16 (Definizione unitaria di limite). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E. Diciamo che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il* **limite** *di f per x tendente a x_0 e scriviamo*

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

se per ogni intorno di V di l esiste un intorno U di x_0 tale che

$$\forall x \in U \cap E, x \neq x_0 \ : \ f(x) \in V.$$

Osservazione 4.17 (Interpretazione analitica). Diamo un'interpretazione analitica della precedente definizione.

(a) Se $l \in \mathbb{R}$ è il limite di f per x tendente a x_0, f assume *vicino* a x_0 un valore prossimo a l, eccettuato al più in x_0 se $x_0 \in E$. Dunque f si stabilizza vicino a l per x tendente a x_0. Si dice che f è **convergente per $x \to x_0$ al valore l.**

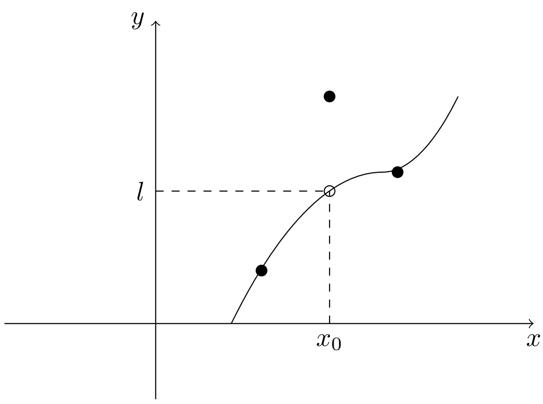
(b) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora $f(x)$ assume per x vicino a x_0 con $x \neq x_0$ valori sempre più grandi: si dice che f **diverge positivamente** per x tendente a x_0. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, allora $f(x)$ assume per x vicino a x_0 con $x \neq x_0$ valori sempre più negativi: si dice che f **diverge negativamente** per x tendente a x_0.

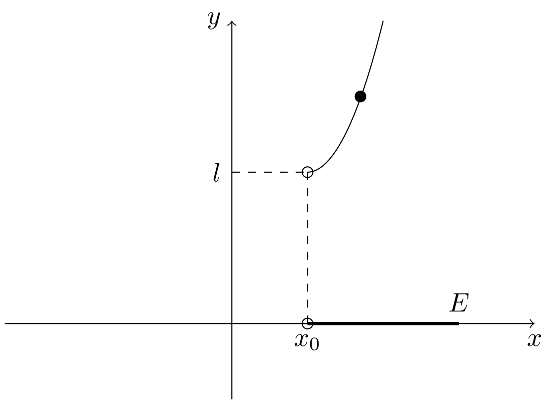
Osservazione 4.18 (Interpretazione geometrica). In termini geometrici, possiamo dire quanto segue.

(a) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si ottiene un'interpretazione geometrica simile a quella vista per la continuità . l è il limite di f per x tendente a x_0 se il punto $(x, f(x))$ sul grafico di f si avvicina per $x \to x_0$ con $x \neq x_0$ al punto (x_0, l).

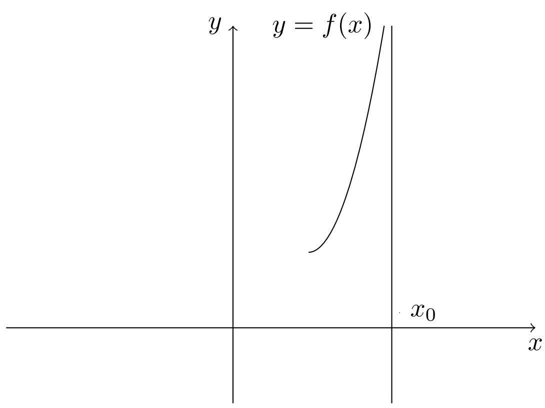




(b) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

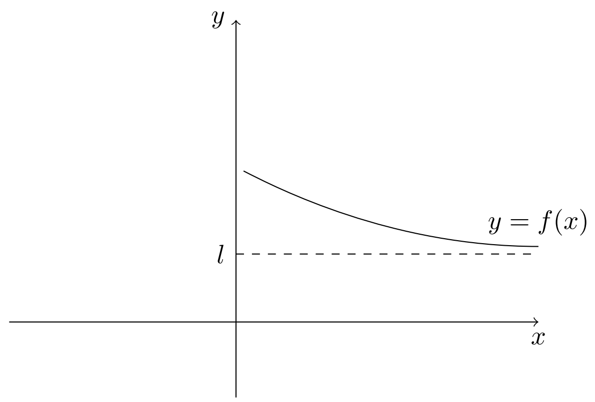
allora $f(x)$ assume valori sempre più alti per x che si avvicina a x_0. Il grafico di f si approssima sempre più a quello della retta verticale $x = x_0$. Diciamo allora che f ammette un **asintoto verticale** in x_0. Un discorso analogo si ha se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.



(c) Se $x_0 = +\infty$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R},$$

il grafico di f si approssima sempre più a quello della retta orizzontale $y = l$. Si dice allora che f ammette la retta $y = l$ come **asintoto orizzontale**.



(d) Se

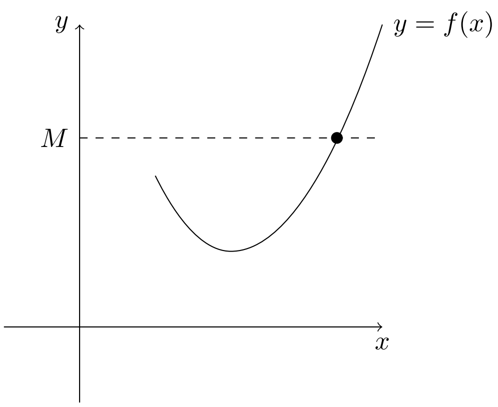
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

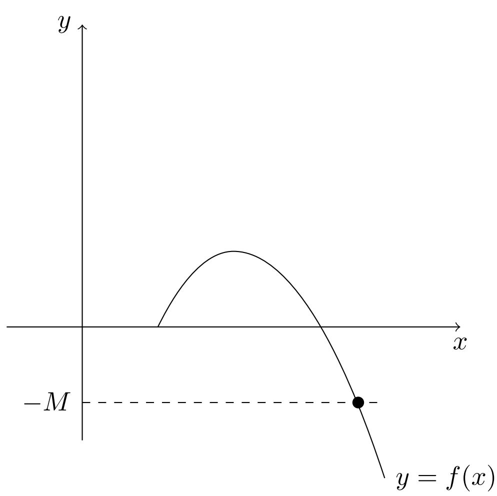
allora $f(x)$ assume valori sempre più alti al crescere di x. Dunque fissato una qualsiasi $M > 0$, il grafico di f per x grande si trova sopra la retta $y = M$.

Se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

allora $f(x)$ assume valori sempre più negativi al crescere di x. Dunque fissata un qualsiasi $M > 0$, il grafico di f per x grande si trova sotto la retta $y = -M$





3. La nozione di limite può riformularsi in termini più classici nel seguente modo. Conviene distinguere i casi $x_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 = \pm\infty$. Le dimostrazioni sono analoghe a quella della Proposizione 4.7.

Proposizione 4.19 (**Caso** $x_0 \in \mathbb{R}$). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per E. Valgono i seguenti fatti.*

(a) Se $l \in \mathbb{R}$, si ha $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(b) Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) > M.$$

(c) Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) < -M.$$

La definizione di limite per x tendente a $+\infty$ si riformula nel seguente modo.

Proposizione 4.20 (**Caso** $x_0 = +\infty$). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che $+\infty$ sia un punto di accumulazione per E. Valgono i seguenti fatti.*

(a) Se $l \in \mathbb{R}$, si ha $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\forall x \in E : x > N \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\forall x \in E : x > N, \Longrightarrow f(x) > M.$$

(c) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\forall x \in E : x > N \Longrightarrow f(x) < -M.$$

Il caso x tendente a $-\infty$ è analogo al precedente.

Proposizione 4.21 (**Caso** $x_0 = -\infty$). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che $-\infty$ sia un punto di accumulazione per E. Valgono i seguenti fatti.*

(a) Se $l \in \mathbb{R}$, si ha $l = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\forall x \in E : x < -N \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *se e solo se per ogni* $M > 0$ *esiste* $N > 0$ *tale che*

$$\forall x \in E : x < -N \Longrightarrow f(x) > M.$$

(c) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *se e solo se per ogni* $M > 0$ *esiste* $N > 0$ *tale che*

$$\forall x \in E : x < -N \Longrightarrow f(x) < -M.$$

4. Il concetto di limite e quello di continuità in un punto sono legati dal seguente risultato.

Proposizione 4.22 (Limiti e continuità). *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione ed* $x_0 \in E$. *Se* x_0 *è d'accumulazione per* E, *allora* f *è continua in* x_0 *se e solo se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

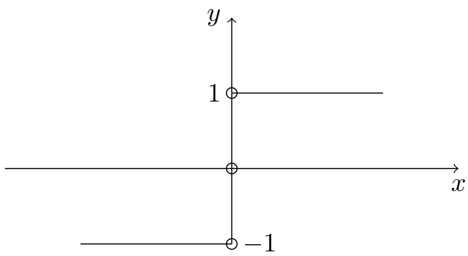
Dimostrazione. La dimostrazione discende immediatamente dalla definizione di continuità e di limite. ■

Osservazione 4.23. La proposizione precedente mostra che la nozione di limite, almeno per le funzioni continue, è interessante solo nei punti d'accumulazione del dominio ma non appartenenti ad esso.

Osservazione 4.24. Il legame con la continuità permette di ricavare l'esistenza di molti limiti. Tuttavia l'esistenza del limite di una funzione non è sempre garantita. Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

non ammette limite per $x \to 0$. Ciò è chiaro dal grafico di f vicino a 0 che si avvicina ai valori 1 e -1.



Osservazione 4.25. Notiamo che l'esistenza ed il valore del limite di f per x tendente a x_0 dipende solo dal comportamento di f vicino a x_0: in altre parole, se f e g coincidono su $E \cap U$ con U intorno di x_0, allora il limite di f per x tendente a x_0 esiste se e solo se esiste quello di g ed essi sono uguali. Questa osservazione mostra che il concetto di limite è una **proprietà locale**.

5. Notiamo la validità dei seguenti limiti per le funzioni elementari. Se $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Similmente $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ se $\alpha > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Notiamo anche che il limite per $x \to 0$ di $\frac{1}{x}$ non esiste: infatti la funzione diventa arbitrariamente grande sia in positivo che in negativo vicino a $x = 0$.

Abbiamo inoltre che

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1. \end{cases}$$

In particolare per la funzione esponenziale abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Riguardo alle funzioni logaritmiche si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1. \end{cases}$$

In particolare per il logaritmo naturale si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0} \ln x = -\infty.$$

Notiamo infine che le funzioni circolari seno e coseno non ammettono limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$: esse infatti tendono ad oscillare tra i valori ± 1 senza stabilizzarsi verso alcun valore. Nel seguito dimostreremo rigorosamente che tali limiti non esistono.

4.4 Primi teoremi sui limiti

In questa sezione ci occupiamo dei primi teoremi sui limiti.

1. Vale il seguente risultato.

   Teorema 4.26. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E. Sia*
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$
   Valgono i seguenti fatti.

   (a) **Unicità del limite**. *Se si ha*
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \tilde{l} \in \overline{\mathbb{R}},$$
   allora $l = \tilde{l}$.

   (b) **Permanenza del segno**. *Se $l \neq 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che f ristretta a $U \cap (E \setminus \{x_0\})$ ha lo stesso segno di l.*

   (c) **Locale limitatezza**. *Se $l \in \mathbb{R}$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che f ristretta a $U \cap E$ è limitata.*

2. Vediamo come si comportano i limiti di funzioni rispetto alle operazioni di somma, prodotto e composizione.

   Proposizione 4.27 (Somma e prodotto dei limiti). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni, e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E. Siano*
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$
   con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora valgono i seguenti fatti.

   (a) Se la somma $l_1 + l_2$ è ben definita, allora la funzione somma $f + g : E \to \mathbb{R}$ ammette limite per $x \to x_0$ e
   $$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

   (b) Se il prodotto $l_1 l_2$ è ben definito, allora la funzione prodotto $fg : E \to \mathbb{R}$ ammette limite per $x \to x_0$ e
   $$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3. Vediamo come si comporta il concetto di limite attraverso una composizione.

Proposizione 4.28 (Composizione dei limiti). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $F \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(E) \subseteq F$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E e supponiamo che*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Valgono i seguenti fatti.

(a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in F$ e g è continua in tale punto, allora la funzione composta $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ ammette limite per $x \to x_0$ e
$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(l).$$

(b) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ è d'accumulazione per F con
$$\lim_{t \to l} g(t) \in \overline{\mathbb{R}}$$
e se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \neq l$ per ogni $x \in U \cap E$ con $x \neq x_0$, allora la funzione composta $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ ammette limite per $x \to x_0$ e
$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{t \to l} g(t).$$

4. Notiamo che i teoremi sulla somma e sul prodotto di limiti richiedono che le quantità $l_1 + l_2$ e $l_1 l_2$ siano ben definite in $\overline{\mathbb{R}}$. Ad esempio nel caso della somma, non è contemplata la situazione
$$l_1 = +\infty \qquad \text{e} \qquad l_2 = -\infty.$$
Si può vedere che in tal caso esistono coppie di funzioni f e g tali che il limite di $f + g$ esiste finito, coppie per cui esso è infinito e coppie per cui non esiste. Infatti se consideriamo le funzioni
$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = -x + 1$$
si ha
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$
mentre essendo $f + g = 1$ si ha
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 1.$$
Se consideriamo $h(x) = -2x$ si ha invece
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty.$$

Se infine $k(x) = -x + \sin x$, allora si ha $f(x) + k(x) = \sin x$ per cui il limite a $+\infty$ non esiste.

5. Nel caso del prodotto, non è contemplata ad esempio la situazione
$$l_1 = +\infty \qquad \text{e} \qquad l_2 = 0$$
Anche in tal caso è possibile scegliere coppie di funzioni f, g in modo che il limite di fg esiste finito, coppie per cui esso è infinito e coppie per cui non esiste. Basta scegliere le funzioni
$$f(x) = \frac{1}{x^4}$$
e le funzioni
$$g(x) = x^4, \qquad h(x) = x^2, \qquad k(x) = x^3$$
per avere che
$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0} f(x)h(x) = +\infty$$
e che $\lim_{x\to 0} f(x)k(x)$ non esiste.

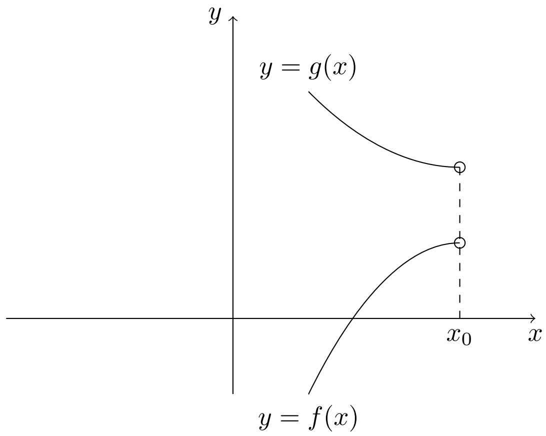
6. Nei casi in cui le operazioni tra l_1 e l_2 non siano ben definite in $\overline{\mathbb{R}}$, si parla di **forme indeterminate**: ogni caso va trattato singolarmente, potendo portare a diverse conclusioni. Troviamo dunque le forme indeterminate
$$(+\infty) + (-\infty) \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot (\infty) \qquad \frac{0}{0}$$
dove ∞ sta sia per $+\infty$ che per $-\infty$. Ad esse si aggiungono le forme
$$0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$
che provengono dalle precedenti a partire da funzioni in forma di potenza $f(x)^{g(x)}$ tramite la riscrittura
$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}.$$

4.5 Criteri di confronto tra i limiti

In questa sezione vediamo come il concetto di limite interagisce con la relazione d'ordine in $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Iniziamo con il seguente risultato.

Proposizione 4.29 (Confronto I). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E. Supponiamo che f e g ammettano limite per $x \to x_0$ e che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$. Allora si ha*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$



2. Un secondo risultato di confronto è il seguente.

Proposizione 4.30 (Confronto II: teorema dei due carabinieri). *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ *tre funzioni e sia* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione per* E*. Supponiamo che per ogni* $x \in E$

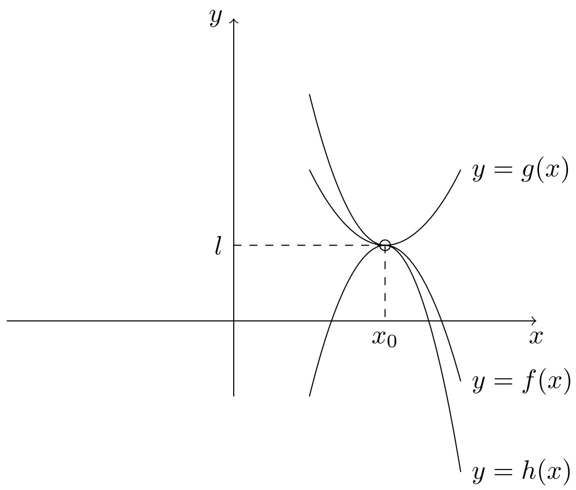
$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Se

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

allora anche f *ammette limite per* $x \to x_0$ *e si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$



3. Notiamo che una funzione $h : E \to \mathbb{R}$ è tale che

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} |h(x)| = 0.$$

Partendo da questa osservazione e dal teorema dei due carabinieri, si deduce la validità del seguente risultato.

Proposizione 4.31 (Regola infinitesimo per limitato). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

e che g sia limitata. Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Dimostrazione. In base all'osservazione precedente, basta verificare che

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)g(x)| = 0.$$

Se $|g| \le M$ su E, notiamo che per ogni $x \in E$ vale la disuguaglianza

$$0 \le |f(x)g(x)| \le M|f(x)|.$$

Essendo

$$\lim_{x\to x_0} (M|f(x)|) = 0,$$

per il teorema dei due carabinieri si ha che $\lim_{x\to x_0} |f(x)g(x)| = 0$, così che la tesi è dimostrata. ∎

Osservazione 4.32. L'importanza del risultato precedente sta nel fatto che non si suppone nulla sull'esistenza del limite di g per $x \to x_0$: esso potrebbe anche non esistere. Ad esempio, nel caso

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sin\frac{1}{x}$$

si ha che g è limitata essendo per ogni $x \neq 0$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

4.6 Funzioni monotone e limiti

In questa sezione dimostreremo un risultato di esistenza di limite per la classe delle funzioni monotone.

1. La definizione di monotonia per una funzione è la seguente.

Definizione 4.33 (Funzioni monotone). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione.*

a) f è monotona crescente su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha

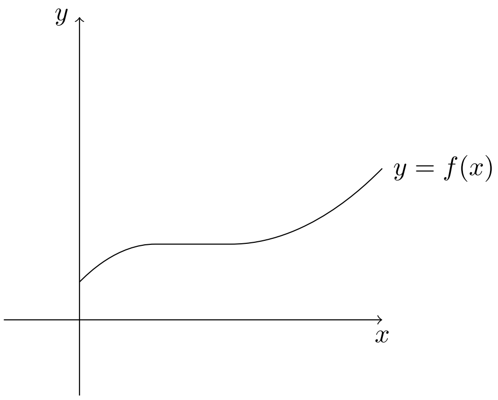
$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

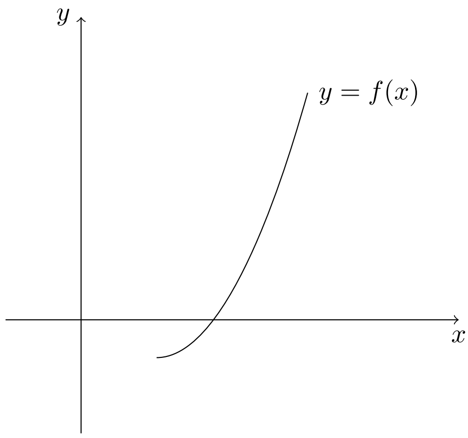
(b) f è monotona decrescente su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Osservazione 4.34. Se le disuguaglianze sui valori di f valgono con il segno di minore o maggiore stretto, cioè $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_1) > f(x_2)$, si parla di funzioni *monotone strettamente crescenti* e *strettamente decrescenti.*

Osservazione 4.35. Geometricamente, le funzioni monotone crescenti hanno per grafico una linea che cresce al crescere di x, possibilmente anche con tratti orizzontali. Tali tratti mancano in caso di stretta monotonia crescente.





Un'interpretazione simile vale per le funzioni decrescenti.

2. Possiamo formulare ora il risultato fondamentale riguardante il limite di funzioni monotone.

Teorema 4.36 (Limiti di funzioni monotone). *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$ e sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione.*

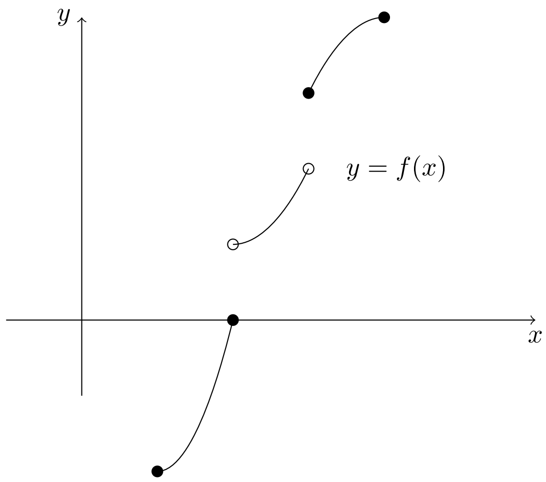
(a) Se f è monotona crescente su $]a,b[$, si ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = \inf_{]a,b[} f \qquad e \qquad \lim_{x\to b} f(x) = \sup_{]a,b[} f.$$

(b) Se f è monotona decrescente su $]a,b[$, si ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sup_{]a,b[} f \qquad e \qquad \lim_{x\to b} f(x) = \inf_{]a,b[} f.$$

Osservazione 4.37. Un punto importante da notare è che le funzioni monotone possono anche essere non continue. Il teorema precedente è dunque un teorema di esistenza di limite per una classe di funzioni non necessariamente continue.



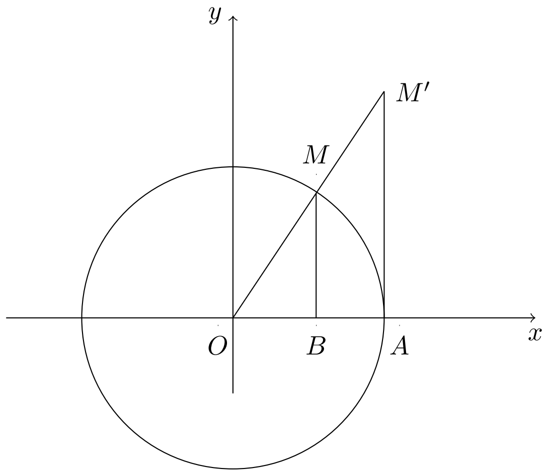
Osservazione 4.38. Notiamo che il teorema precedente vale anche nel caso in cui $a = -\infty$ e $b = +\infty$, cioè l'intervallo di definizione di f è illimitato.

Osservazione 4.39. La nozione di monotonia può essere formulata anche per funzioni definite su sottoinsiemi generici E di $\mathbb{R}$. Il teorema di esistenza del limite può essere adattato al caso generale di $f : E \to \mathbb{R}$ considerando i limiti per x tendente a $\sup E$ o $\inf E$ a patto che essi siano di accumulazione per E.

4.7 Un primo limite fondamentale: limite di $\frac{\sin x}{x}$ per x tendente a zero

Vogliamo mostrare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Esso non può essere calcolato grazie alle proprietà dei limiti viste in precedenza dal momento che si presenta la forma indeterminata $0/0$. La conoscenza di tale limite è essenziale, come vedremo più avanti, nel calcolo della *derivata* della funzione seno.

1. Seguiamo un ragionamento geometrico. Consideriamo la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.



Considerando l'angolo $x = A\hat{O}M$ piccolo e positivo, un confronto tra le aree dei triangoli OMB e $OM'A$ con l'area del settore circolare $0AM$ mostra che

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

da cui le relazioni

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Tali relazioni valgono anche per x piccolo e negativo dal momento che

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Notiamo che per la continuità della funzione coseno si ha

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Per il teorema dei due carabinieri otteniamo dunque che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

4.8 Un secondo limite fondamentale: il numero e

Vogliamo mostrare che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

dove e è un numero compreso tra 2 e 3 detto il *numero di Nepero*. Esso ricorre spesso in Analisi matematica con un'importanza non inferiore a quella di π. Notiamo che il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞.

1. Dobbiamo innanzitutto richiamare la formula del binomio di Newton. Un calcolo diretto mostra che il quadrato del binomio $x+y$ con $x, y \in \mathbb{R}$ è dato da

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

mentre il cubo del binomio $x+y$ è dato da

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Per scrivere la formula del caso generale $(x+y)^n$ ci servono alcune definizioni.

Definizione 4.40 (Fattoriale). *Sia $n \in \mathbb{N}$. Diciamo* fattoriale *di n il numero $n!$ definito nel seguente modo:*

$$0! = 1, \qquad n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Si ha così $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$ e così via.

Definizione 4.41 (Coefficienti binomiali). *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$. Poniamo*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Notiamo che vale la simmetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Esempio 4.42. Si ha ad esempio

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2, \quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1.$$

Similmente si ha

$$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{0!3!} = 1, \quad \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{1!2!} = 3.$$

La formula per la potenza $(x+y)^n$ è la seguente (ne omettiamo la dimostrazione): si parla di *formula del binomio di Newton*. È utile la seguente notazione che abbrevia la scrittura di una somma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$\sum$ è detto simbolo di sommatoria.

Proposizione 4.43 (Formula del binomio di Newton). *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Vale la formula*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Notiamo che la formula precedente si riduce alle usuali formule del quadrato e del cubo di un binomio sopra ricordate.

2. Risulta utile inoltre la seguente relazione: da

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n) = 1-q^{n+1}$$

ricaviamo

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

relazione valida per ogni $q \neq 1$ e $n \geq 1$.

3. Torniamo al nostro limite e facciamo prima variare x nell'insieme dei numeri naturali non nulli: consideriamo cioè la funzione

$$n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

Poiché $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, siamo nelle condizioni di poter calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Valgono i seguenti fatti.

(a) La funzione $n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è una funzione monotona strettamente crescente di n.

(b) Si ha

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Grazie alla monotonia della successione, esiste dunque il limite

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e risulta $2 < e \leq 3$. Un conto più accurato mostra poi che $2 < e < 3$.

Vediamo i punti (a) e (b).

(a) Applicando lo sviluppo del binomio si ha

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\dots+\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots\\ &\qquad \dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

La somma a secondo membro cresce al crescere di n coinvolgendo sempre più termini. Di conseguenza $n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è una funzione monotona strettamente crescente di n.

(b) Si ha certamente per $n > 1$

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Inoltre, poiché i binomi $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}\dots$ sono minori di 1, si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Calcolando la somma a secondo membro si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

e dunque per ogni $n > 1$

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

4. Per ottenere il limite con $x \in \mathbb{R}$ e $x \to +\infty$, basta notare che se $n \geq 1$ è tale che $n \leq x \leq n+1$, si ha

$$1+\frac{1}{n+1} \leq 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{n}$$

da cui

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ma si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

Per il criterio del confronto si ha allora

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

5. Per ottenere il limite con $x \in \mathbb{R}$ e $x \to -\infty$, basta porre $x = -(y+1)$ con $y > 0$ per ottenere
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-y-1} = \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}$$
per cui
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = e.$$

6. Notiamo infine la relazione
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
valida per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essa si ottiene ponendo $y = \frac{n}{x}$ (per $x \neq 0$ altrimenti il risultato è banale) ottenendo
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^x.$$
Il risultato si ottiene passando al limite per $y \to +\infty$ o $y \to -\infty$.

4.9 Ulteriori limiti fondamentali

Vogliamo vedere che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Notiamo che essi si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La conoscenza di tali limiti è essenziale, come vedremo, per il calcolo delle *derivate* delle funzioni esponenziale e logaritmo.

1. Poniamo
$$z = e^x - 1$$
così che $x = \ln(1+z)$ e
$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{z}{\ln(1+z)} = \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}}.$$
Si ha
$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

così che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = 1.$$

2. Dal limite dell'esponenziale deriva immediatamente anche il limite del logaritmo: se poniamo $\ln(1+x)=t$, si ricava $x=e^t-1$ ed il limite in questione diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1.$$

3. Valgono le seguenti generalizzazioni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Infatti si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \ln a.$$

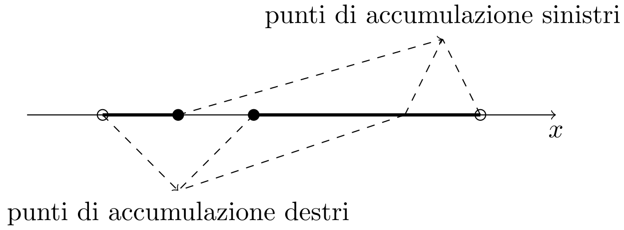
e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x\ln a} = \log_a e.$$

4.10 Limiti destro e sinistro

Siano $E\subseteq\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di E. Vogliamo dare un senso al limite di f quando x tende a x_0 assumendo valori più grandi o più piccoli di x_0.

1. Siano $E\subseteq\mathbb{R}$ un insieme e $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione sinistro** per E se x_0 è punto di accumulazione per $E\cap]-\infty,x_0[$. Similmente diciamo che x_0 è un **punto di accumulazione destro** per E se x_0 è punto di accumulazione per $E\cap]x_0,+\infty[$.



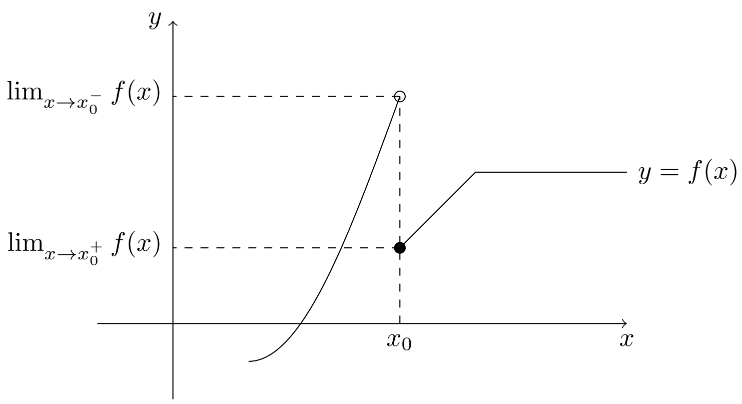
Geometricamente, x_0 è punto di accumulazione sinistro per E se è punto di accumulazione per la parte di E a sinistra di x_0. Un'interpretazione simile vale per il punto di accumulazione destro.

2. Se x_0 è punto d'accumulazione sinistro di E, possiamo applicare la teoria dei limiti alla restrizione di $f : E \to \mathbb{R}$ all'insieme $E \cap]-\infty, x_0[$. Se il limite per $x \to x_0$ di tale restrizione esiste, esso si dice il **limite sinistro di f in x_0** e si indica con

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

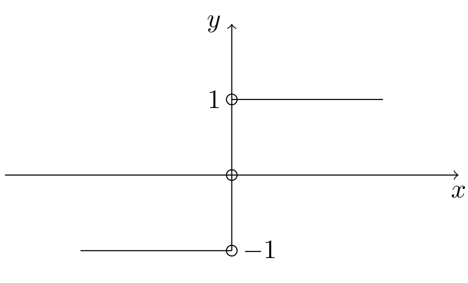
Similmente se x_0 è punto d'accumulazione destro di E e se il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $E \cap]x_0, +\infty[$ esiste, esso si dice il **limite destro di f in x_0** e si indica con

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$



Ad esempio si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

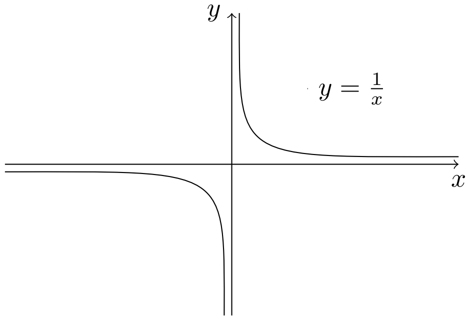


e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Per il limite destro e sinistro valgono definizioni e proprietà simili a quelle viste per il caso del limite ordinario. Se ad esempio $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$, ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in E : x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$



Vale la seguente proposizione di facile verifica.

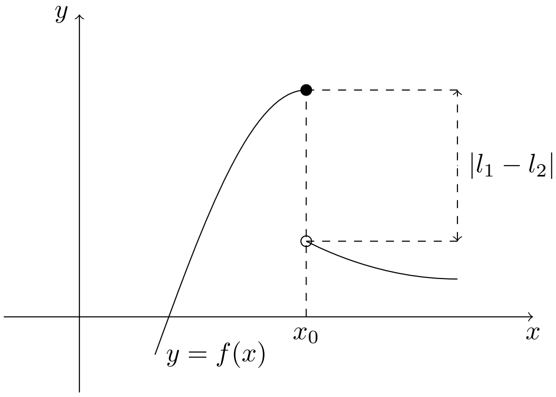
Proposizione 4.44. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione destro e sinistro di E. Allora il limite per x tendente a x_0 di f esiste se e solo se esistono i limiti destri e sinistri ed essi coincidono: in tal caso il limite risulta uguale al loro valore comune.*

L'esistenza del limite a partire dall'uguaglianza dei limiti destro e sinistro è un caso particolare dell'esistenza del limite rispetto a restrizioni che "esauriscono' l'insieme di definizione di f. Se ad esempio $E = F_1 \cup F_2$ e x_0 è d'accumulazione per F_1 e F_2, allora il limite per $x \to x_0$ di f esiste se e solo se esistono i limiti di f ristretta a F_1 e F_2 e tali limiti coincidono.

3. Sia $x_0 \in E$ di accumulazione destro e sinistro per E tale che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$. Diremo in tal caso che f **ammette un salto in x_0 di ampiezza** $|l_1 - l_2|$.



Notiamo che se $x_0 \in E$, f non è certamente continua in x_0: si dice spesso che f ammette in x_0 una *discontinuità di prima specie.*

4.11 Infinitesimi ed infiniti

Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di E.

1. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 4.45. *Diremo che f è* infinitesima *in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Il confronto fra diverse funzioni infinitesime si conduce nel seguente modo.

Definizione 4.46. *Siano f e g infinitesime in x_0 e supponiamo che g non si annulli in un intorno di x_0 (salvo al più in x_0).*

(a) Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

diremo che f e g sono infinitesime dello stesso ordine in x_0.

(b) Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

diremo che f è un infinitesimo di ordine superiore a g in x_0.

(c) Se

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty,$$

diremo che f è un infinitesimo di ordine inferiore a g in x_0.

(d) In tutti gli altri casi, diremo che f e g sono infinitesimi non confrontabili con il criterio del rapporto dei limiti.

Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

si usa spesso scrivere

$$f(x) = o(g(x)).$$

Si dice in tal caso che f è un "*o-piccolo*" di g per $x \to x_0$. Allora nel caso in cui f è un infinitesimo di ordine superiore a g in x_0 avremo che $f(x) = o(g(x))$. Se f e g sono infinitesime dello stesso ordine in x_0, possiamo invece scrivere

$$f(x) = lg(x) + o(g(x))$$

dove $l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$. La quantità lg si dice *l'infinitesimo principale* di f rispetto a g per $x \to x_0$, intendendo che il resto è trascurabile rispetto ad esso: vedremo tra poco in quale senso tale affermazione è vera.

2. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, spesso si utilizza la funzione $x \mapsto (x-x_0)$ come infinitesimo di confronto: diremo che f è *infinitesima di ordine n in x_0* se f è infinitesima dello stesso ordine di $(x-x_0)^n$ in x_0. Possiamo scrivere
$$f(x) = l(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$
con $l \neq 0$ e $l(x-x_0)^n$ è l'infinitesimo principale di f per $x \to x_0$. Ad esempio la funzione $f(x) = e^x - 1$ è infinitesima di ordine 1 in $x = 0$ essendo
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$
L'infinitesimo principale di $e^x - 1$ per $x \to 0$ risulta pari a x. Similmente $f(x) = 1 - \cos x$ è infinitesima di ordine 2 in $x = 0$ essendo
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
e $\frac{1}{2}x^2$ è l'infinitesimo principale di $1 - \cos x$ per $x \to 0$.

3. La nozione di infinitesimo dello stesso ordine è utile nello studio dei limiti dei rapporti. Se vogliamo calcolare il limite
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$
e sappiamo che f_1 è infinitesima dello stesso ordine di g_1 mentre f_2 è infinitesima dello stesso ordine di g_2, si ha
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{l_1 g_1(x) + o(g_1(x))}{l_2 g_2(x) + o(g_2(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \frac{l_1 + \dfrac{o(g_1(x))}{g_1(x)}}{l_2 + \dfrac{o(g_2(x))}{g_2(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{l_1 g_1(x)}{l_2 g_2(x)}.$$
Dunque il limite di partenza è equivalente al limite del rapporto $l_1 g_1(x)/l_2 g_2(x)$, cioè al limite del rapporto degli infinitesimi principali: in tal senso gli infinitesimi di ordine superiore possono essere trascurati. Se ad esempio f_1 è infinitesima di ordine n_1 e f_2 è infinitesima di ordine n_2, allora si ha
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{l_1 (x-x_0)^{n_1}}{l_2 (x-x_0)^{n_2}}.$$
Il secondo limite è di facile studio, dipendendo solo dai numeri n_1 e n_2. Ad esempio si ha
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

4. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 4.47. *Diremo che f è* infinita *in x_0 se*

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty.$$

Il confronto tra infiniti si opera nel seguente modo.

Definizione 4.48. *Siano f e g infinite in x_0.*

(a) Se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

diremo che f e g sono infinite dello stesso ordine in x_0*.*

(b) Se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

diremo che f è un infinito di ordine inferiore a g in x_0*.*

(c) Se

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=+\infty,$$

diremo che f è un infinito di ordine superiore a g in x_0*.*

(d) In tutti gli altri casi, diremo che f e g sono infiniti non confrontabili con il criterio del rapporto dei limiti.

Se f e g sono infinite dello stesso ordine in x_0, possiamo scrivere

$$f(x)=lg(x)+o(g(x))$$

dove $l\in\mathbb{R}$, $l\neq 0$. La quantità lg si dice *l'infinito principale* di f rispetto a g per $x\to x_0$ e come nel caso degli infinitesimi è la quantità a cui si deve guardare per il calcolo dei limiti dei rapporti: se f_1 è infinita dello stesso ordine di g_1 mentre f_2 è infinita dello stesso ordine di g_2, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{l_1g_1(x)}{l_2g_2(x)}$$

cioè il limite di partenza è equivalente al limite del rapporto degli infiniti principali.

5. Se $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$, si usa prendere come infinito di confronto la funzione $x \mapsto x^n$: diremo che f è *infinita di ordine n all'infinito* se f è infinita dello stesso ordine di x^n per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Possiamo scrivere

$$f(x) = lx^n + o(x^n)$$

con $l \neq 0$ e lx^n è l'infinito principale di f per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Ad esempio si ha che $f(x) = 3x^5 + x^3 + x + 1$ è infinita di ordine 5 per $x \to +\infty$ essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 + x^3 + x + 1}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^5} = 3.$$

L'infinito principale è dunque dato da $3x^5$, cioè dal termine di grado massimo del polinomio. Volendo calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + 3x^5 + x^3 + x + 1}{7x^3 + 2x + 1}$$

possiamo calcolare il limite degli infiniti principali e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + 3x^5 + x^3 + x + 1}{7x^3 + 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{7x^3} = \frac{1}{7} \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

4.12 Successioni

Diciamo *successione* di numeri reali ogni funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$

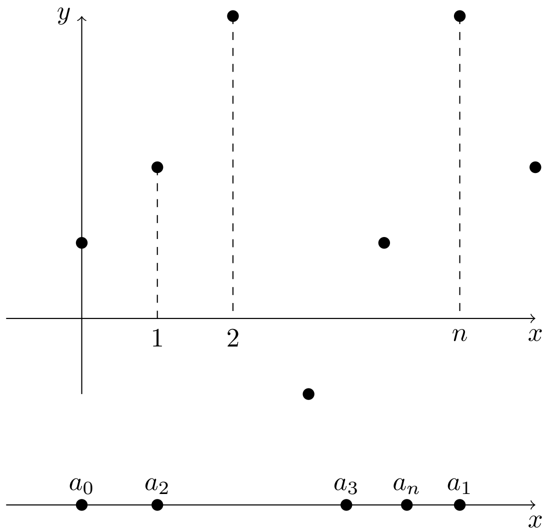
$$\begin{aligned} a:\ & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \mapsto a(n). \end{aligned}$$

Si scrive solitamente a_n al posto di $a(n)$ e si indica la successione con i simboli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Da un punto di vista geometrico, essendo una successione una particolare funzione, il grafico associato è composto di una quantità infinita di punti.

   Un'altra utile rappresentazione geometrica di una successione consiste nel pensarla come un insieme di punti
   $$\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$$
   in $\mathbb{R}$ indicizzati dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

2. Essendo delle funzioni speciali, possiamo particolareggiare alle successioni molte nozioni introdotte in precedenza. Ad esempio si dice che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *limitata* se esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$
   $$|a_n| \leq M.$$



Geometricamente, ciò significa che l'insieme dei punti della successione è contenuta nell'intervallo limitato $[-M, M]$. Una successione si dice *monotona crescente* se per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n+1}$$

e si dice *monotona decrescente* se per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Geometricamente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente se al crescere di n i punti della successione si spostano a destra (eventualmente rimanendo fermi) sulla retta reale. Similmente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente se al crescere di n i punti della successione si spostano a sinistra (eventualmente rimanendo fermi) sulla retta reale.

3. La teoria dei limiti può applicarsi alle successioni per n tendente a $+\infty$: infatti $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$. Si usa la seguente nomenclatura.

Definizione 4.49. *Si dice che la successione di numeri reali* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) converge *se esiste finito* $\lim_{n\to+\infty} a_n$*;*

(b) diverge positivamente *se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$*;*

(c) diverge negativamente *se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$*;*

(d) oscilla *se non esiste* $\lim_{n\to+\infty} a_n$*.*

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ si scrive spesso $a_n \to a$.

Osservazione 4.50. Dal punto di vista della teoria dei limiti, le successioni vengono studiate solo per $n \to +\infty$: di conseguenza, senza alcun cambiamento rilevante, possiamo estendere la nozione di successione inglobando le funzioni con dominio $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, che ammettono ancora $+\infty$ come punto di accumulazione. Ad esempio considereremo successione anche

$$a_n = \sqrt{n-7}$$

il cui dominio è $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 7\}$.

Esempio 4.51. In base al limite notevole, sappiamo ad esempio che è convergente la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e precisamente essa converge ad e per $n \to +\infty$. Esempi di successioni divergenti sono

$$a_n = n^2 \qquad \text{e} \qquad b_n = -n^3.$$

Un esempio di successione oscillante è invece $a_n = (-1)^n$.

4. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Consideriamo una successione di numeri naturali $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ e la successione

$$\{a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}.$$

La nuova successione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è detta una *sottosuccessione* della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ad esempio data la successione

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \quad \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

la successione

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

è la sottosuccessione ottenuta considerando solo gli indici pari. Geometricamente, una sottosuccessione di una successione data è semplicemente un suo campionamento.

È chiaro che se una successione è convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora ogni sua sottosuccessione converge ancora ad l. Se la successione diverge, ogni sua sottosuccessione è divergente. Se invece una successione è oscillante, potrebbero esistere sottosuccessioni convergenti: questo è il caso ad esempio di

$$a_n = (-1)^n.$$

Si ha che la successione non converge, ma risultano convergenti le sottosuccessioni date dagli indici pari e dispari. Infatti la prima converge a 1 mentre la seconda a -1.

Teorema 4.52 (Teorema di Bolzano-Weierstrass). *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora essa ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Per ipotesi, si ha $a_n \in I = [-M, M]$ con $M > 0$ opportuno. Poniamo $I_0 = I$ e $n_0 = 0$. Dividiamo I_0 in due intervalli chiusi di uguale ampiezza: almeno uno dei due intervalli, diciamolo I_1, contiene infiniti elementi della successione. Sia n_1 un indice tale che $a_{n_1} \in I_1$. Dividiamo I_1 in due sottointervalli chiusi di ugual ampiezza: almeno uno dei due, diciamolo I_2 contiene infiniti elementi della successione. Sia $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} \in I_2$. Proseguiamo in questo modo costruendo

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_k \supset \dots$$

famiglia di intervalli chiusi inclusi uno nel successivo ed individuando

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

indici tali che $a_{n_k} \in I_k$. Notiamo che I_k è un intervallo di ampiezza $(2M)/2^k$ e che $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_{n_k} \in I_k$ per ogni k.

Per il principio degli intervalli inclusi di Cantor, esiste $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} I_k$. Essendo

$$|a_{n_k} - x_0| \leq \frac{2M}{2^k}$$

ricaviamo che

$$\lim_{k\to+\infty} |a_{n_k} - x_0| = 0$$

cioè $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $x_0 \in I$. La tesi è dunque dimostrata. ■

5. Le successioni sono utili anche nello studio dei limiti per funzioni di variabile reale. Se f ammette limite l per $x \to x_0$, allora si ha che $f(x)$ risulta sempre più prossimo a l al tendere di x a x_0. Dunque se $a_n \in E$, $a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$, si ha che $f(a_n)$ approssima sempre più l, cioè

$$f(a_n) \to l.$$

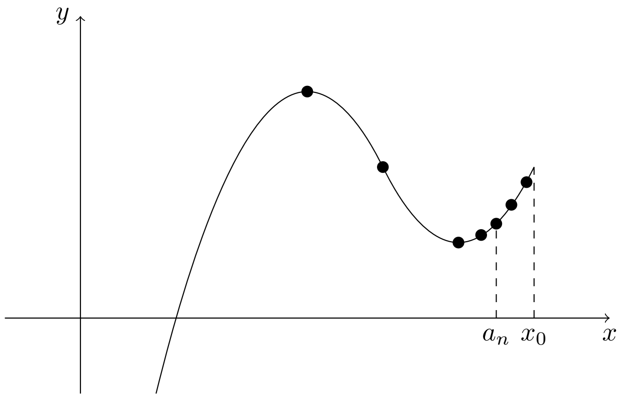
Viceversa, se lungo ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n \in E$, $a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$, si ha $f(a_n) \to l$, allora indipendentemente dal modo in cui ci si avvicina a x_0 il valore di f si stabilizza a l. Dunque il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste e vale l.

Otteniamo dunque il seguente risultato.

Proposizione 4.53 (Limiti di funzione e successioni). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E. Allora f ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a x_0 se e solo se per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendente a x_0 con $a_n \in E$ e $a_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$f(a_n) \to l.$$

Osservazione 4.54. La proposizione precedente fornisce un metodo per verificare che il limite di una funzione non esiste: basta trovare due successioni tendenti a x_0 lungo cui f



converge a due limiti diversi. Ad esempio, possiamo vedere che le funzioni seno e coseno non ammettono limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Infatti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Esistendo due successioni diverse che tendono $+\infty$ lungo le quali la funzione coseno ammette limiti diversi, concludiamo che $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ non esiste.

4.13 Teoremi fondamentali sulle funzioni continue

In questa sezione dimostriamo alcuni teoremi fondamentali sulle funzioni che dipendono solo dalla continuità e non dalla loro forma analitica specifica.

1. Iniziamo con il seguente teorema.

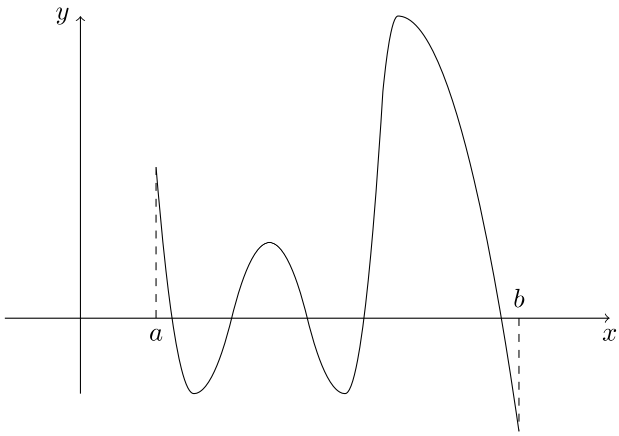
Teorema 4.55 (Teorema degli zeri). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Per la continuità di f e per il teorema della permanenza del segno, esiste $\varepsilon > 0$ tale che f è positiva su $[a, a + \varepsilon]$ e negativa su $[b - \varepsilon, b]$. Consideriamo l'insieme

$$E := \{x \in [a, b] \,:\, f(x) \geq 0\}.$$

Notiamo che E è non vuoto essendo $[a, a + \varepsilon] \subseteq E$ e che $E \subseteq [a, b - \varepsilon[$. Sia $x_0 := \sup E$. Chiaramente $a + \varepsilon < x_0 \leq b - \varepsilon$, cioè $x_0 \in]a, b[$. Vediamo che $f(x_0) = 0$. Infatti, essendo per n grande $x_0 + \frac{1}{n} \in [a, b]$ con $x_0 + \frac{1}{n} \notin E$, si ha

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \leq 0,$$



da cui grazie alla continuità di f abbiamo

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

D'altro canto, essendo $x_0 = \sup E$, si ha che esiste $a_n \in E$ con

$$x_0 - \frac{1}{n} < a_n < x_0.$$

Essendo $f(a_n) \geq 0$ e $a_n \to x_0$, otteniamo

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \geq 0.$$

Concludiamo $f(x_0) = 0$ e la tesi è dimostrata. ∎

2. Come corollario abbiamo il seguente risultato.

Teorema 4.56 (Teorema dei valori intermedi). *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$. In particolare $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Se $\inf_I f = \sup_I f$, allora f è costante su I e non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora $\inf_I f < \sup_I f$ e sia $k \in]\inf_I f, \sup_I f[$. Per definizione di sup e inf esistono $a, b \in I$ tali che

$$f(a) < k < f(b).$$

Possiamo supporre $a < b$ (il caso $b > a$ essendo simile). Consideriamo la funzione continua $g(x) = f(x) - k$ ristretta all'intervallo $[a, b] \subseteq I$. Notiamo che $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$: dunque per il teorema degli zeri esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $g(x_0) = 0$. Ma allora si ha $f(x_0) = k$, cioè k è un valore assunto da f su I.

Concludiamo che $f(I)$ è tale che

$$]\inf_I f, \sup_I f[\subseteq f(I) \subseteq [\inf_I f, \sup_I f].$$

Dunque $f(I)$ è necessariamente uguale ad uno dei seguenti intervalli

$$]\inf_I f, \sup_I f[, \qquad [\inf_I f, \sup_I f[, \qquad]\inf_I f, \sup_I f], \qquad [\inf_I f, \sup_I f].$$

Il teorema è dunque dimostrato. ■

Osservazione 4.57. Vediamo ora una conseguenza di natura algebrica del teorema dei valori intermedi. Vale il seguente risultato:

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado dispari.
Allora $p(x)$ ammette almeno una radice.

Possiamo infatti supporre che $p(x) = x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \cdots + a_{2k}x + a_{2k+1}$, con $k \geq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$. Notiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

Concludiamo che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} p(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} p(x) = +\infty.$$

Essendo $p(x)$ una funzione continua, per il teorema dei valori intermedi esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(x_0) = 0$, così che la dimostrazione è conclusa.

3. Il seguente teorema si occupa del massimo e del minimo di funzioni continue.

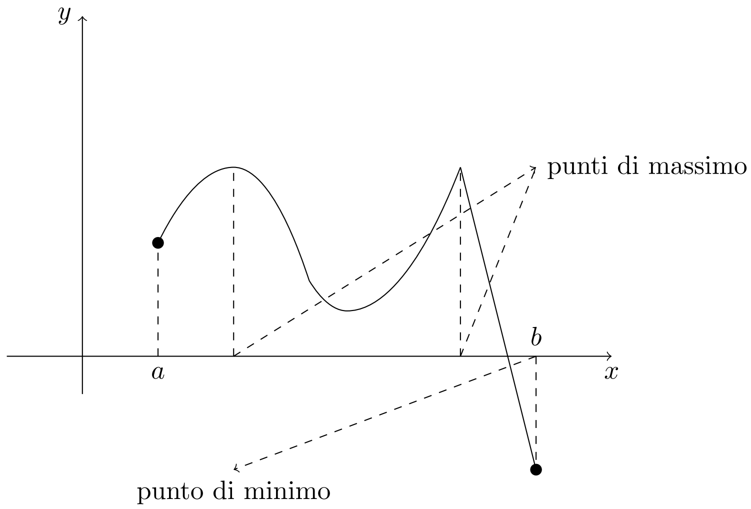
Teorema 4.58 (Teorema di Weierstrass). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Vediamo l'esistenza del punto di minimo, il ragionamento per il massimo essendo del tutto simile. Sia $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\inf_{[a,b]} f < t_n$ e

$$t_n \to \inf_{[a,b]} f.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dalla definizione di $\inf_{[a,b]} f$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che

$$\inf_{[a,b]} f < f(x_n) < t_n$$



e dunque per confronto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_{[a,b]} f. \tag{4.1}$$

Grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x_0 \in [a,b]$. Vediamo che x_0 è un punto di minimo per f.

Per la continuità di f

$$f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}),$$

e dunque da (4.1) (chiaramente $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$)

$$f(x_0) = \inf_{[a,b]} f,$$

cioè x_0 è un punto di minimo per f. ■

Osservazione 4.59. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilizzata nella dimostrazione, cioè tale che $f(x_n) \to \inf_{[a,b]} f$ si dice una *successione minimizzante* per f: ogni funzione ammette successioni minimizzanti.

Osservazione 4.60. Combinando il teorema dei valori intermedi con il teorema di Weierstrass, possiamo dire che ogni funzione continua f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo, cioè

$$f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f].$$

Esercizi

1. Dimostrare la continuità della funzione radice n-esima usando la sua monotonia.

2. Dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}$ ha infiniti elementi, allora E ammette almeno un punto di accumulazione.

3. Siano $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per E e $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Dimostrare che per ogni intorno V di l si ha $V \cap f(E) \neq \emptyset$. Trovare un esempio in cui l non è di accumulazione per $f(E)$.

4. Trovare una coppia di funzioni $f, g : E \to \mathbb{R}$ tali che la somma ammette limite per $x \to x_0$ ma tali che i limiti di f e g prese singolarmente non esistono. Stessa cosa poi per il prodotto.

5. Trovare una coppia di funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ componibili e tali che
$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) \neq \lim_{y\to \lim_{x\to x_0} f(x)} g(y).$$

6. Trovare un esempio di funzioni $f, g : E \to \mathbb{R}$ con $f < g$ su E tali che esiste x_0 di accumulazione per E con $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

7. Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.

8. Siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se per ogni successione (a_n) tale che $a_n \in E$ e $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to f(x_0)$.

9. Dimostrare che una successione ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se ogni sua sottosuccessione converge a l.

10. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ che soddisfa la proprietà
$$\sup_{U\cap[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f$$
per ogni intorno U di x_0. Tale punto è detto *un punto di Weierstrass di f*. Dimostrare inoltre che se f è continua in x_0, allora x_0 è un punto di massimo di f.