Capitolo 1

Cenni di logica e teoria degli insiemi

1.1 Alcuni elementi di logica

In matematica si parte da alcuni principi, la cui validità è assunta senza dimostrazione, per poi dedurre nuove affermazioni. I principi si dicono *assiomi*, le nuove deduzioni si dicono *teoremi*. Si presuppone chiaramente che esistano delle regole di riferimento che stabiliscano come debbano essere formulati gli assiomi ed i teoremi e quali siano le tecniche di deduzione ammissibili. Di ciò si occupa la logica formale. In questa sezione descriveremo alcune sue nozioni fondamentali che saranno utili nello studio dell'analisi matematica.

La prima nozione fondamentale è quella di *affermazione*. Esempi di affermazioni sono le seguenti

$$3 < 10$$

$$2^2 > 9.$$

Si prendono in considerazione affermazioni *vere* (come la prima) ed affermazioni *false* (come la seconda). Nel seguito indicheremo le affermazioni con le lettere $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$.

Esistono diversi modi per creare nuove affermazioni a partire da alcune date.

1. *Negazione.* Se $\mathcal{P}$ è un'affermazione, *non*$\mathcal{P}$ è l'affermazione che è vera se $\mathcal{P}$ è falsa, ed è falsa se $\mathcal{P}$ è vera. Riassumendo con una tavola (detta *tavola di verità*) si ha

$\mathcal{P}$	V	F
non$\mathcal{P}$	F	V

2. *Congiunzione.* Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}e\mathcal{Q}$ è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere. La tavola di verità corrispondente è

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}e\mathcal{Q}$	V	F	F	F

3. *Disgiunzione.* Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P} o \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è vera quando almeno una tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è vera. La tavola di verità corrispondente è

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} o \mathcal{Q}$	V	V	V	F

Osserviamo che nel linguaggio comune la disgiunzione rimanda ad un'idea di alternativa che non è presente in logica formale, dove si prescinde dal contenuto delle affermazioni. Possiamo dunque considerare l'affermazione (vera)

$$3 > 1 \text{ o } 5 > 4$$

anche se non vi è un'alternativa naturale tra $3 > 1$ e $5 > 4$.

4. *Implicazione.* Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è l'affermazione che ha come tavola di verità

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	V	F	V	V

L'affermazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$", oppure "se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$") è dunque sempre vera tranne nel caso in cui $\mathcal{P}$ è vera e $\mathcal{Q}$ è falsa. Il linguaggio comune rimanda per l'implicazione ad un concetto di causa-effetto. Questo rapporto è assente in logica formale. Così è lecito considerare l'affermazione (vera)

$$1 < 2 \Rightarrow 4 \text{ è pari}$$

anche se non corre alcun rapporto tra il fatto che $1 < 2$ e quello che 4 sia un numero pari. Il motivo per cui $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ viene considerata vera anche se $\mathcal{P}$ è falsa può essere compreso tramite il seguente esempio. Consideriamo l'affermazione

$$\text{se } n \text{ è multiplo di 4 allora } n \text{ è multiplo di 2.}$$

È plausibile volere che tale affermazione sia vera indipendentemente dalla scelta di n. Se scegliamo $n = 3$, otteniamo l'affermazione

$$\text{se 3 è multiplo di 4 allora 3 è multiplo di 2.}$$

Dunque affinché essa risulti vera, dobbiamo accettare che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ sia vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono false. Similmente, se scegliamo $n = 2$, dobbiamo accettare che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ sia vera quando $\mathcal{P}$ è falsa e $\mathcal{Q}$ è vera.

5. *Doppia implicazione.* Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$") è l'affermazione che ha come tavola di verità

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$	V	F	F	V

Si tratta dunque dell'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false. Due affermazioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ con $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ vera sono considerate intercambiabili.

I simboli *non*, *e*, *o*, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sopra introdotti si dicono *connettivi logici*. Essi ricorrono spesso nella formulazione dei risultati in matematica.

L'obiettivo principale del ragionamento matematico, come detto sopra, è quello di dedurre nuove affermazioni vere a partire da alcune affermazioni di partenza. Notiamo che se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni e sappiamo che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ sono entrambe vere, allora dalla tabella di verità dell'implicazione si deduce che $\mathcal{Q}$ è a sua volta vera. Questa *regola di deduzione* è fondamentale e viene indicata con la locuzione "*modus ponens*". Essa è la motivazione essenziale per cui i teoremi in matematica hanno spesso la forma $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: $\mathcal{P}$ si dice l'*ipotesi* e $\mathcal{Q}$ la *tesi*. *Dimostrare* un teorema significa stabilire la verità dell'implicazione.

Un modo per dimostrare un teorema che spesso ricorre in matematica è il cosiddetto *procedimento o dimostrazione per assurdo*. Notiamo che se $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ sono tre affermazioni e l'affermazione

$$(\mathcal{P} \ e \ (non\mathcal{Q})) \Rightarrow (\mathcal{R} \ e \ (non\mathcal{R}))$$

è vera, allora l'analisi della tabella di verità mostra che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera. In termini intuitivi, possiamo dire così : per dimostrare un teorema, è possibile vedere che l'assumere per vere contemporaneamente l'ipotesi e la negazione della tesi porta ad una contraddizione.

Una seconda nozione fondamentale in logica è quella di *predicato*. Un predicato è un'affermazione dipendente da una o più *variabili*, la cui verità dipende dai valori assunti dalle variabili stesse. Ad esempio

$$x^2 > 8$$

è un predicato in una variabile, mentre

$$x^2 + y > 10$$

è un predicato in due variabili. I predicati verranno indicati con $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x, y)$ e così via. Le affermazioni possono essere pensati come predicati che non dipendono da nessuna variabile.

Le regole viste sopra per comporre affermazioni possono essere impiegate per produrre nuovi predicati a partire da predicati dati: il predicato risultante dipende da tutte le variabili da cui dipendono i predicati da comporre. Ad esempio

$$\mathcal{P}(x) \ o \ \mathcal{Q}(y, z)$$

è un predicato nelle due variabili x, y e z.

Sono fondamentali le seguenti procedure che consentono di ottenere affermazioni a partire da predicati.

1. *Sostituzione delle variabili con costanti.* Ad esempio, se $\mathcal{P}(x)$ è il predicato

$$x^3 > 81$$

si ha che $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(100)$ sono due affermazioni (la prima falsa e la seconda vera). Sostituendo variabili con costanti in predicati dipendenti da tante variabili, si ottengono predicati dipendenti da meno variabili: ad esempio se $\mathcal{P}(x, y, z)$ è il predicato

$$x^2 + y^2 < 2z^2$$

allora $\mathcal{P}(1, y, 4)$ il predicato $1 + y^2 < 32$ dipendente dalla variabile y.

2. *Applicazione dei quantificatori universale* $\forall$ *(per ogni) ed esistenziale* $\exists$ *(esiste).* Se $\mathcal{P}(x)$ è un predicato, allora

$$\forall x : \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa "il predicato $\mathcal{P}(x)$ è vero per ogni x". Ad esempio

$$\forall x : x^2 + 1 > 0$$

è un'affermazione vera, mentre

$$\forall x : x > 7$$

è un'affermazione falsa. Il quantificatore $\forall$ può essere utilizzato per ridurre il numero di variabili in un predicato: ad esempio

$$\forall x : y > 10 - x^2$$

è un predicato nella variabile y ottenuto dal predicato in due variabili $y > 10 - x^2$.

Per quanto riguarda il quantificatore esistenziale $\exists$, si ha che

$$\exists x : \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa "il predicato $\mathcal{P}(x)$ è vero per almeno un x". Ad esempio

$$\exists x : x^3 > 81$$

è un'affermazione vera.

Occorre prestare attenzione al fatto che l'ordine di quantificazione è importante. Ad esempio l'affermazione

$$\forall x \; \exists y \; : x < y$$

risulta vera, mentre l'affermazione

$$\exists y\ \forall x\ : x < y$$

è certamente falsa poiché prendendo $x = y + 1$ si ottiene un'affermazione falsa.

Ci saranno infine utili le negazioni di affermazioni contenenti quantificatori. La negazione di

$$\forall x : \mathcal{P}(x)$$

è

$$\exists x : non\mathcal{P}(x)$$

mentre la negazione di

$$\exists x : \mathcal{P}(x)$$

è

$$\forall x : non\mathcal{P}(x)$$

1.2 Alcune nozioni di teoria degli insiemi

In questa sezione descriveremo alcune operazioni fondamentali di teoria degli insiemi che sono utili in analisi matematica. Procederemo come nella precedente sezione, in modo cioè non formale. Per *insieme* intenderemo una collezione di oggetti, anche di diversa natura: esempi possono essere l'insieme dei numeri pari, o l'insieme dei polinomi di primo grado nella variabile x, o l'insieme delle circonferenze del piano di centro l'origine. Gli oggetti della collezione vengono detti *elementi* dell'insieme. Se x è elemento dell'insieme A, allora scriveremo

$$x \in A$$

e diremo che "x *appartiene* a A". Per indicare un insieme attraverso i suoi elementi, nel caso in cui essi siano finiti, si usa spesso la notazione $A = \{x, y, z, \ldots ...\}$, cioè si elencano gli elementi di A tra parentesi graffe: ad esempio, se scriviamo $A = \{1, 2, 7\}$, significa che A è l'insieme i cui elementi sono i numeri $1, 2$ e 7.

Useremo le seguenti abbreviazioni:

$$\forall x \in A : \mathcal{P}(x) \quad \text{significa} \quad \forall x : x \in A \Rightarrow \mathcal{P}(x)$$

$$\exists x \in A : \mathcal{P}(x) \quad \text{significa} \quad \exists x : x \in A \ e\, \mathcal{P}(x)$$

Indicheremo con $\emptyset$ l'insieme che non ha elementi: lo diremo l'*insieme vuoto*. Pensare a $\emptyset$ come ad un insieme può apparire strano, ma risulta assai conveniente in matematica.

Se A, B sono insiemi, diremo che A è *sottoinsieme* di B se ogni elemento di A è anche elemento di B. In simboli

$$\forall x \in A : x \in B.$$

Scriveremo in tal caso $A \subseteq B$. Nel caso in cui A sia sottoinsieme di B e A non coincida con B, scriveremo $A \subset B$.

Vale il seguente principio: per ogni A, B

$$(A \subseteq B \ e \ B \subseteq A) \Rightarrow A = B,$$

vale a dire, se tutti gli elementi di A sono elementi di B e viceversa, allora A e B sono uguali. Tale principio è detto *assioma di estensionalità* . Notiamo che si ha sempre $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$.

Vediamo ora alcune operazioni che permettono di costruire nuovi insiemi a partire da alcuni dati.

1. Se A è un insieme, diremo *insieme delle parti di* A, e lo indicheremo con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A. Ad esempio, se $A = \{1, 4\}$, l'insieme $\mathcal{P}(A)$ è dato da
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}\}.$$

2. Se A e B sono due insiemi, diremo unione di A e B, e scriveremo $A \cup B$, l'insieme che ha come elementi gli elementi di A e quelli di B. In simboli
$$\forall x : x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \ o \ x \in B).$$
L'unione di insiemi può essere operata anche su una famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$, dove I è un insieme di indici. Scriveremo $\cup_{i \in I} A_i$ per indicare l'insieme che ha come elementi quelli dei vari A_i. Notiamo che $A \cup \emptyset = A$ per ogni insieme A.

3. Se A e B sono due insiemi, diremo *intersezione* di A e B, e scriveremo $A \cap B$, l'insieme che ha come elementi gli elementi comuni di A e B. In simboli
$$\forall x : x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \ e \ x \in B).$$
L'intersezione di insiemi può essere operata anche su una famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$, dove I è un insieme di indici. Scriveremo $\cap_{i \in I} A_i$ per indicare l'insieme i cui elementi appartengono ad ogni A_i. Notiamo che $A \cap \emptyset = \emptyset$ per ogni insieme A.

4. Per individuare sottoinsiemi di un dato insieme, si utilizza il seguente *principio di specificazione*. Se $\mathcal{R}(x)$ è un predicato in una variabile ed A è un insieme, si può considerare l'insieme $B \subseteq A$ ottenuto scegliendo quegli elementi di x che rendono vero $\mathcal{R}(x)$. In formule
$$\forall x : x \in B \Leftrightarrow (x \in A \ e \ \mathcal{R}(x)) .$$
Ad esempio, il sottoinsieme dei numeri pari dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ può essere individuato nel seguente modo:
$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è divisibile per } 2\}.$$

5. Diremo *differenza* tra due insiemi A e B, e scriveremo $A \setminus B$, l'insieme tale che

$$\forall x : x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B)\,.$$

   Si tratta dunque del sottoinsieme degli elementi di A che non sono elementi di B. Notiamo che a differenza dell'unione e dell'intersezione tra due insiemi, l'ordine nella differenza è importante.

6. Siano A e B due insiemi, e siano $x \in A$ e $y \in B$. Diremo *coppia ordinata* x, y l'oggetto (x, y). x si dice la prima componente della coppia, mentre y si dice la seconda componente.

   L'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$ si dice il *prodotto cartesiano* tra A e B e si indica con $A \times B$.

1.3 Funzioni

Siano A e B due insiemi. Sia f una *legge* che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B. Diremo in tal caso che f è una **funzione** o un'**applicazione** tra A e B. L'elemento corrispondente a $a \in A$ viene indicato con $f(a)$. Si usa spesso la scrittura $f : A \to B$ per indicare la funzione f. Si usa anche la scrittura seguente

$$\begin{aligned} f:\quad A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

volendo specificare la natura delle legge che all'elemento a associa $f(a)$. L'insieme A viene detto il **dominio** di f.

Esempio 1.1. E' una funzione tra l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri pari $\mathbb{P}$ la legge che associa ad ogni numero il suo doppio, cioè ad ogni numero n il numero $2n$. Scriviamo allora

$$\begin{aligned} f:\quad \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

Non è invece una funzione la legge tra l'insieme dei numeri positivi e quello di tutti i numeri reali che associa ad ogni numero positivo a la soluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 = a$. Infatti al numero $a = 4$ ad esempio vengono associati i due numeri 2 e -2, quindi non un solo numero reale.

1. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 1.2 (Immagini e preimmagini). *Sia $f : A \to B$ un'applicazione tra A e B e sia $C \subseteq A$. Diremo* **immagine** *di C secondo f e l'indicheremo con il simbolo $f(C)$ l'insieme*

$$f(C) := \{b \in B : \exists c \in C : f(c) = b\ \}.$$

*Diremo che $f(A)$ è l'***insieme immagine** *di f e lo indicheremo con $Im(f)$.*

Se $D \subseteq B$, diremo **preimmagine** *di D secondo f l'insieme*

$$f^{-1}(D) := \{a \in A : f(a) \in D\}.$$

$f(C)$ è il sottoinsieme di B formato da tutti gli elementi $f(c)$ al variare di c in C, cioè l'insieme di tutte le immagini degli elementi di C secondo la legge f. $f^{-1}(D)$ è invece formato dagli elementi del dominio che vengono trasformati da f in elementi di D.

Esempio 1.3. Se

$$\begin{aligned} f :\ \ \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 7n \end{aligned}$$

si ha che $f(\{2,3\}) = \{14, 21\}$, mentre $Im(f)$ è l'insieme dei numeri divisibili per 7. Infine si ha $f^{-1}(\{7\}) = \{1\}$ e $f^{-1}(\{9, 13\}) = \emptyset$.

Definizione 1.4 (Funzione iniettiva). *Sia $f : A \to B$ un'applicazione tra A e B. Diremo che f è* iniettiva *se per ogni $a_1, a_2 \in A$ si ha*

$$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Un'applicazione è dunque iniettiva se ad elementi distinti di A vengono associati elementi distinti di B.

Esempio 1.5. Risulta iniettiva la funzione

$$\begin{aligned} f :\ \ \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

mentre non risulta iniettiva la funzione

$$\begin{aligned} g :\ \ \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

dal momento che $g(-1) = g(1) = 1$.

Definizione 1.6 (Funzione inversa). *Sia $f : A \to B$ un'applicazione tra A e B iniettiva. Diremo funzione inversa di f l'applicazione*

$$f^{-1} : f(A) \to A$$

che associa ad ogni $b \in f(A)$ l'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Notiamo che la definizione della funzione inversa f^{-1} utilizza in modo fondamentale il fatto che f sia iniettiva. Si dice spesso che una funzione iniettiva è invertibile.

Esempio 1.7. Se consideriamo

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

allora f è iniettiva e $f(\mathbb{N})$ è dato dall'insieme $D \subseteq \mathbb{N}$ dei numeri naturali che sono dei quadrati perfetti. La funzione inversa è data da

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ D &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Definizione 1.8 (Funzione suriettiva). *Sia $f : A \to B$ un'applicazione tra A e B. Diremo che f è* suriettiva *da A su B se $B = Im(f)$.*

Una funzione f è dunque suriettiva se ogni elemento di B proviene tramite f da un elemento di A, cioè B coincide con l'immagine di A.

Esempio 1.9. La funzione

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

è suriettiva da $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}$, mentre la funzione

$$\begin{aligned} g: \ \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

non risulta suriettiva da $\mathbb{N}$ su $\mathbb{N}$, perché ad esempio 7 non risulta il quadrato di alcun numero naturale.

Definizione 1.10 (Funzione biettiva). *Sia $f : A \to B$ una funzione tra A e B. Diremo che f è* biettiva *tra A e B se f è iniettiva e se f è suriettiva da A su B. In tal caso, la funzione inversa f^{-1} è definita da B in A.*

Esempio 1.11. Se

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

allora f è biettiva. Inoltre, se $m \in \mathbb{Z}$, la preimmagine n secondo f si ottiene risolvendo $m = n + 1$, cioè $n = m - 1$. La funzione inversa è data dunque da

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ m &\mapsto m-1. \end{aligned}$$

Indicando m un numero arbitrario, si può scrivere anche

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n-1. \end{aligned}$$

Infatti le variabili m e n nelle formule precedenti sono dette variabili "mute": è chiaro infatti che le due scritture descrivono la medesima legge.

2. Esistono operazioni canoniche che permettono di costruire nuove funzioni a partire da funzioni date. A questo livello di generalità , due importanti operazioni sono quelle di restrizione e di composizione.

Definizione 1.12 (Restrizione). *Siano $f : A \to B$ e $A_1 \subseteq A$. Allora la funzione*

$$\begin{aligned} A_1 &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

si dice la restrizione di f ad A_1 e si indica con $f_{|A_1}$.

Esempio 1.13. La restrizione a $\mathbb{N}$ di

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ m &\mapsto m+1 \end{aligned}$$

è data da

$$\begin{aligned} f_{|\mathbb{N}}: \quad \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

Definizione 1.14 (Composizione di funzioni). *Siano A, B, C, D quattro insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subseteq C$. Diremo* funzione composta *di f e g la funzione $g \circ f : A \to D$ tale che*

$$\begin{aligned} g \circ f: \quad A &\to D \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

La composizione di f e g non è altro dunque che la legge ottenuta concatenando le due funzioni f e g.

Esempio 1.15. La composizione di

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

è la funzione $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2.$$