Capitolo 2

Numeri reali

In questo capitolo ci occuperemo dell'insieme dei numeri reali che indicheremo con il simbolo $\mathbb{R}$: le funzioni definite su tali insiemi e a valori reali sono l'oggetto di studio dell'analisi matematica in una variabile.

Non forniremo una costruzione rigorosa dell'insieme $\mathbb{R}$. Ci accontenteremo di descrivere in modo preciso le proprietà delle operazioni di somma, prodotto e relazione d'ordine che lo caratterizzano.

2.1 Proprietà fondamentali dei numeri reali

1. Elenchiamo separatamente le proprietà dell'addizione, moltiplicazione e relazione d'ordine.

   1. **Operazione di addizione**. È definita una funzione $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ad ogni coppia di numeri x, y associa il numero $s(x, y)$ indicato con $x + y$ (detto *addizione* o *somma* di x e y) in modo tale che valgano i seguenti fatti:

      (a) $x + y = y + x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;

      (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$;

      (c) esiste un elemento 0 in $\mathbb{R}$ tale che $0 + x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

      (d) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un elemento y detto *opposto* di x tale che $y + x = 0$.

      La proprietà (i) viene detta proprietà commutativa dell'addizione, mentre quella (ii) viene detta proprietà associativa. Con un linguaggio algebrico, le proprietà precedenti si riassumono dicendo che $\mathbb{R}$ è un *gruppo abeliano* rispetto all'addizione. L'elemento opposto risulta unico e si indica con $-x$.

   2. **Operazione di moltiplicazione**. È definita una funzione $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ad ogni coppia di numeri x, y associa il numero $p(x, y)$ indicato con xy (detto *moltiplicazione* o *prodotto* di x e y) in modo tale che valgano i seguenti fatti:

(a) $xy = yx$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $(xy)z = x(yz)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(c) esiste un elemento 1 in $\mathbb{R}$ tale che $1x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(d) per ogni $x \neq 0$ esiste un elemento y detto *inverso* di x tale che $yx = 1$;

(e) per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha
$$x(y + z) = xy + xz.$$

L'ultima proprietà lega le operazioni di addizione e moltiplicazione. Globalmente, tenendo conto delle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, possiamo dire con linguaggio algebrico che $\mathbb{R}$ è un *campo* rispetto a somma e prodotto. L'elemento inverso di $x \neq 0$ risulta unico e si indica con x^{-1}.

3. **Relazione d'ordine**. Ogni coppia di numeri $x, y \in \mathbb{R}$ verifica una (o tutte e due) delle relazioni $x \leq y$ (che si legge x minore o uguale a y) o $y \leq x$ che godono delle seguenti proprietà :

(a) $x \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e da $x \leq y$ e $y \leq x$ discende $x = y$;

(b) da $x \leq y$ e $y \leq z$ segue che $x \leq z$;

(c) da $x \leq y$ segue che $x + z \leq y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$;

(d) da $0 \leq x$ e $0 \leq y$ segue che $0 \leq xy$.

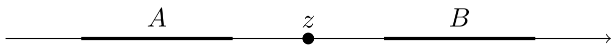
Il fatto che due elementi di $\mathbb{R}$ siano sempre confrontabili tra loro e che valgano le proprietà (i) e (ii), viene riassunto dicendo che la relazione $\leq$ è una *relazione di ordine totale* su $\mathbb{R}$. Le proprietà (iii) e (iv) legano tale relazione alle proprietà di somma e prodotto sopra definite.

La relazione $x \leq y$ si può anche scrivere nella forma $y \geq x$ (y maggiore o uguale a x). La relazione $x \leq y$ e $x \neq y$ si indica con $x < y$ (x minore stretto di y) o $y > x$ (y maggiore stretto di x).

4. **Assioma di Dedekind**. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e tali che per ogni $x \in A$ e $y \in B$ si abbia $x \leq y$. Allora esiste un elemento $z \in \mathbb{R}$ che separa A e B, cioè tale che per ogni $x \in A$ e $y \in B$
$$x \leq z \leq y.$$

2. Useremo la seguente terminologia. Se $x \geq 0$ ($x > 0$), diremo che x è un numero **non negativo** (**positivo**); e $x \leq 0$ ($x < 0$), diremo che x è un numero **non positivo** (**negativo**). Il numero 0 è contemporaneamente non positivo e non negativo. Se x è positivo, allora $-x$ è negativo; se x è negativo, allora $-x$ è positivo. Indicheremo con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi.

3. È utile rappresentare geometricamente $\mathbb{R}$ su una retta orientata: poniamo i numeri positivi a destra di 0, posizionando $x > 0$ a distanza x da 0. Similmente poniamo i numeri negativi a sinistra dell'origine, posizionando $x < 0$ a distanza $-x$ da 0. L'assioma di Dedekind può rappresentarsi geometricamente nel seguente modo:



   L'assioma di Dedekind implica che a tutti i punti della retta corrispondono numeri reali: dunque la retta reale forma un *continuo* di punti.

4. Nel seguito saranno importanti i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ poniamo
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \qquad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \qquad [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$
   $[a,b]$ si dice **intervallo chiuso** di estremi a e b. $]a,b[$ si dice invece **intervallo aperto** di estremi a e b. Infine $[a,b[$ e $]a,b]$ si dicono **intervalli chiusi/aperti a sinistra** e **aperti/chiusi a destra**.

   Dagli assiomi precedenti discendono le usuali regole di calcolo per i numeri reali riguardanti le operazioni elementari.

2.2 Estremi superiore ed inferiore di un insieme

In questa sezione ci occupiamo dei concetti fondamentali di massimo e minimo per un insieme di numeri reali e della loro generalizzazione alle nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore.

1. La definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di numeri reali è la seguente.

   Definizione 2.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Diciamo che $M \in E$ è il* **massimo** *di E se*
$$\forall x \in E : x \leq M.$$
   Diciamo che $m \in E$ è il **minimo** *di E se*
$$\forall x \in E : m \leq x.$$

   Se il massimo o il minimo di E esistono, essi sono unici: infatti se M_1 e M_2 sono ad esempio due massimi di E, deve essere $M_1 \leq M_2$ e $M_2 \leq M_1$, cioè $M_1 = M_2$. Il massimo ed il minimo si indicano con i simboli
$$\max E \qquad \text{e} \qquad \min E.$$

Non è detto che un insieme E in $\mathbb{R}$ ammetta massimo o minimo (vedi l'esempio seguente). Geometricamente, il massimo $\max E$ (se esiste) di un insieme E sulla retta reale è il punto di E che si trova più a destra di tutti gli altri punti di E. Similmente, il minimo $\min E$ (se esiste) è il punto di E che si trova più a sinistra di tutti gli altri punti di E.

Esempio 2.2. Se $E = [0, 1]$, si ha

$$\min E = 0 \qquad \max E = 1$$

Se invece $F =]0, 1]$, F non ammette minimo, mentre il massimo vale 1. Se $G = [0, 1[$, si ha che $\min G = 0$, mentre G non ammette massimo. Infine $H =]0, 1[$ non ammette né massimo né minimo.

I concetti di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme generalizzano la nozione di massimo e minimo quando questi ultimi non esistono.

2. Iniziamo con la definizione di maggiorante e minorante di un insieme.

Definizione 2.3 (Maggiorante e minorante per un insieme). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.*

(a) Diciamo che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per E se

$$\forall x \in E : x \leq M.$$

(b) Diciamo che $m \in \mathbb{R}$ è un minorante per E se

$$\forall x \in E : m \leq x.$$

Definizione 2.4 (Insiemi limitati e illimitati). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.*

(a) Diciamo che E è superiormente limitato se E ammette un maggiorante $M \in \mathbb{R}$. Se l'insieme dei maggioranti è vuoto, diremo che E è illimitato superiormente.

(b) Diciamo che E è inferiormente limitato se E ammette un minorante $m \in \mathbb{R}$. Se l'insieme dei minoranti è vuoto, diremo che E è illimitato inferiormente.

(c) Diciamo che E è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Osservazione 2.5. Geometricamente, un insieme E sulla retta reale è superiormente limitato se si trova tutto a sinistra di un punto M; similmente E è inferiormente limitato se si trova tutto a destra di un punto m.

3. Il teorema fondamentale della sezione è il seguente.

Teorema 2.6. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.*

(a) *Se E è superiormente limitato, allora l'insieme dei maggioranti di E è non vuoto e ammette minimo.*

(b) *Se E è inferiormente limitato, allora l'insieme dei minoranti di E è non vuoto e ammette massimo.*

Dimostrazione. Dimostriamo il caso (a), essendo la dimostrazione di (b) del tutto simile. Supponiamo dunque che E sia superiormente limitato. Per definizione, l'insieme dei maggioranti di E è un insieme $\mathcal{M}(E)$ non vuoto. Notiamo che

$$\forall x \in E,\ \forall y \in \mathcal{M}(E) : x \leq y.$$

Per l'assioma di Dedekind, esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in E,\ \forall y \in \mathcal{M}(E) : x \leq z \leq y. \tag{2.1}$$

La prima disuguaglianza in (2.1) ci dice che z un maggiorante di E: dunque $z \in \mathcal{M}(E)$. La seconda disuguaglianza in (2.1) ci dice che z è il più piccolo dei maggioranti, cioè $z = \min \mathcal{M}(E)$. La tesi è dunque dimostrata. ■

Grazie al teorema precedente, la seguente definizione è ben posta.

Definizione 2.7 (Estremo superiore e inferiore). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se E è superiormente limitato, diciamo estremo superiore di E il minimo dei maggioranti di E. Similmente, se E è inferiormente limitato, diciamo estremo inferiore di E il massimo dei minoranti di E. Indicheremo l'estremo superiore con $\sup E$ e l'estremo inferiore con $\inf E$.*

Chiaramente, se E è limitato, si ha $\inf E \leq \sup E$.

Osservazione 2.8 (Rapporto tra sup/inf e max/min). Valgono i seguenti fatti.

(a) Se E ammette massimo, allora $\max E = \sup E$. Infatti E è superiormente limitato perché $\max E$ è un maggiorante, ed anzi $\max E$ è più piccolo di tutti i maggioranti (poiché appartiene all'insieme).

(b) Si può dire anzi che E ammette massimo se e solo se è superiormente limitato e $\sup E \in E$: in tal caso $\max E = \sup E$.

Discorsi simili valgono per il minimo e l'estremo inferiore.

4. Ci sarà utile nel seguito il seguente risultato. Diremo che una famiglia $\mathcal{I}$ di intervalli è una **famiglia di intervalli inclusi** se per ogni $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ si ha $I_1 \subseteq I_2$ o $I_2 \subseteq I_1$.

Proposizione 2.9 (Principio degli intervalli inclusi di Cantor). *Sia $\mathcal{I}$ una famiglia non vuota di intervalli inclusi del tipo $[a, b]$ (cioè intervalli chiusi). Allora esiste almeno un $x \in \mathbb{R}$ tale che x appartiene ad ogni intervallo della famiglia $\mathcal{I}$.*

Dimostrazione. Siano

$$E = \{c \in \mathbb{R} : [c, d] \in \mathcal{I} \text{ per qualche } d \in \mathbb{R}\}$$

e

$$F = \{f \in \mathbb{R} : [e, f] \in \mathcal{I} \text{ per qualche } e \in \mathbb{R}\}.$$

Gli insiemi E e F sono non vuoti e per ogni $c \in E$ e $f \in F$ si ha $c \leq f$: infatti ciò è dovuto all'ipotesi che $\mathcal{I}$ sia una famiglia di intervalli inclusi perché se

$$I_1 = [c, d] \in \mathcal{I} \qquad I_2 = [e, f] \in \mathcal{I}$$

sono gli intervalli associati a c e f, essendo uno incluso nell'altro si ha certamente $c \leq f$.

Per l'assioma di Dedekind, esiste $x \in \mathbb{R}$ che separa E e F. Se $[a, b] \in \mathcal{I}$, essendo $a \in E$ e $b \in F$, si ha

$$a \leq x \leq b$$

cioè $x \in [a, b]$. La tesi è dunque dimostrata. ■

Osservazione 2.10. Si può vedere in realtà che $[\sup E, \inf F] \subseteq I$ per ogni $I \subseteq \mathcal{I}$.

2.3 I numeri naturali, interi e razionali

In questa sezione descriviamo alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$.

1. Diciamo insieme dei numeri naturali l'insieme

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Notiamo che somma e prodotto di numeri naturali sono ancora numeri naturali. Inoltre $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente: in particolare per ogni $x > 0$ e $y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$nx > y.$$

Questa viene detta la *proprietà archimedea* di $\mathbb{N}$. Infine ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ammette minimo: si dice che $\mathbb{N}$ è *ben ordinato*.

È utile la seguente caratterizzazione di $\mathbb{N}$. Supponiamo che un insieme di numeri reali A sia tale che

(a) $0 \in A$;

(b) se $x \in A$ allora $x + 1 \in A$.

Si ha subito $\mathbb{N} \subseteq A$. Dunque potremmo caratterizzare $\mathbb{N}$ nel seguente modo:

> *L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ che gode delle proprietà (a) e (b).*

2. Diciamo **insieme dei numeri relativi** l'insieme

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}).$$

Si ha chiaramente che somma, prodotto ed opposto di elementi di $\mathbb{Z}$ sono ancora elementi di $\mathbb{Z}$. Inoltre $\mathbb{Z}$ è illimitato sia superiormente che inferiormente.

3. Diciamo **insieme dei numeri razionali** l'insieme

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Somma, prodotto, opposti e inversi di elementi di $\mathbb{Q}$ sono ancora elementi di $\mathbb{Q}$. Contenendo l'insieme dei numeri relativi, $\mathbb{Q}$ risulta illimitato superiormente ed inferiormente. Valgono inoltre le seguenti proprietà :

(a) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha

$$]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset;$$

(b) per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x < a\} = a \qquad \text{e} \qquad \inf\{x \in \mathbb{Q} : x > a\} = a.$$

La proprietà (a) viene solitamente indicata come la *densità* di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. La proprietà (b), conseguenza di (a), dice invece che ogni numero reale può essere approssimato per eccesso o per difetto con precisione grande a piacere tramite numeri razionali.

4. La densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ insieme all'approssimabilità di ogni numero reale tramite un numero razionale con precisione grande a piacere può far sorgere il dubbio che $\mathbb{Q}$ esaurisca tutto $\mathbb{R}$. Questo non accade: ci sono operazioni che sono ben poste in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$. Un esempio è dato dall'estrazione della radice. Vale il seguente risultato.

Proposizione 2.11 (Esistenza della radice n-esima). *Siano $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Allora esiste uno ed un solo $x \geq 0$ tale che $x^n = a$, indicato con $\sqrt[n]{a}$.*

Possiamo ora vedere che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.12. *Si ha $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. In particolare $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se fosse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, si avrebbe

$$\frac{n^2}{m^2} = 2$$

per qualche $n, m \in \mathbb{N}$. In particolare

$$n^2 = 2m^2.$$

Il numero n^2 risulta così divisibile per 2 un numero dispari di volte, e ciò è assurdo poiché essendo il quadrato di numero naturale, esso risulta divisibile per 2 al più un numero pari di volte. ∎

2.4 Insieme dei numeri reali estesi

In vista della teoria dei limiti che tratteremo nel prossimo capitolo, è opportuno ampliare l'insieme dei numeri reali introducendo due oggetti che intuitivamente rappresentano un numero *infinitamente grande* ed il suo opposto. Poniamo

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

I simboli $-\infty$ e $+\infty$ indicano due oggetti che supporremo tali che

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x$$

e

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < +\infty.$$

L'insieme $\bar{\mathbb{R}}$ si dice insieme dei **numeri reali estesi**.

1. Stabiliamo le seguenti regole di calcolo algebrico in $\overline{\mathbb{R}}$:

   (a) per ogni $x \in \mathbb{R}$

   $$+\infty + x = x + \infty = +\infty$$

   e

   $$-\infty + x = x + (-\infty) = -\infty;$$

   (b) per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$

   $$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty$$

   e

   $$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty,$$

mentre per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x < 0$

$$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty$$

e

$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty;$$

(c) si ha

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \\ -(+\infty) &= -\infty \\ -(-\infty) &= +\infty \\ (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) &= +\infty \\ (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

Grazie alle convenzioni precedenti, è possibile verificare che le proprietà di base di somma e prodotto (ad esempio le proprietà commutativa e associativa) risultano ancora valide in $\overline{\mathbb{R}}$ non appena le operazioni in gioco sono ben definite.

2. Estendiamo i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore a sottoinsiemi $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti ma illimitati nel seguente modo:

   (a) se E è superiormente illimitato, diremo che $\sup E = +\infty$;

   (b) se E è inferiormente illimitato, diremo che $\inf E = -\infty$.

   In base alle definizioni precedenti, ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ammette estremo inferiore ed estremo superiore $\inf E$ e $\sup E$ in $\overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\inf E \leq \sup E.$$

3. Useremo infine la seguente notazione per gli intervalli:

$$[a, +\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \qquad]a, +\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

   e

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \qquad]-\infty, a[\, = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

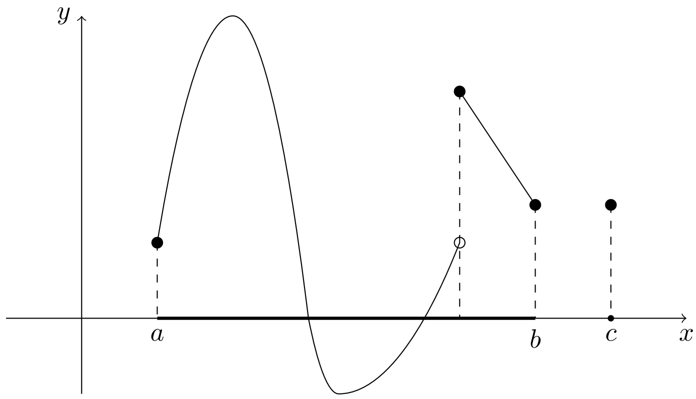
   Talvolta si scrive anche $]-\infty, +\infty[$ per indicare l'insieme $\mathbb{R}$.

2.5 Funzioni di variabile reale

Nel corso ci occuperemo dello studio delle funzioni reali di variabile reale, cioè studieremo funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subseteq \mathbb{R}$. Esse si presentano in modo naturale nello studio di alcune questioni di geometria analitica e di fisica.

1. Da un punto di vista geometrico, una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ può rappresentarsi attraverso il suo grafico $y = f(x)$: si tratta dei punti del piano della forma $(x, f(x))$ con $x \in E$. Formalmente scriviamo

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, y = f(x)\}.$$



$E = [a, b] \cup \{c\}$

$\mathcal{G}(f)$ è in generale una *linea curva* nel piano con la proprietà che ogni retta verticale $x = x_0$ con $x_0 \in E$ interseca $\mathcal{G}(f)$ in un solo punto, il punto $(x_0, f(x_0))$. È dunque chiaro che non tutte le linee curve nel piano sono il grafico di una funzione di variabile reale.

I concetti generali introdotti in precedenza possono interpretarsi geometricamente nel caso delle funzioni di variabile reale utilizzando il loro grafico.

(a) Un valore c appartiene all'immagine di f se esiste $x_0 \in E$ tale che $c = f(x_0)$. Ciò significa che $(x_0, c) \in \mathcal{G}(f)$, cioè la retta $y = c$ interseca $\mathcal{G}(f)$. Quindi $Im(f)$ si caratterizza come l'insieme delle quote c (visualizzabili sull'asse delle ordinate) tali per cui la retta $y = c$ interseca $\mathcal{G}(f)$. Le preimmagini di $c \in Im(f)$ sono date dalle ascisse dei punti di intersezione di $y = c$ con $\mathcal{G}(f)$.

(b) In base al punto (a), vediamo che f è iniettiva se e solo se le rette orizzontali intersecano $\mathcal{G}(f)$ al più in un punto.

(c) Se f è invertibile, allora il grafico della funzione inversa $f^{-1} : f(E) \to \mathbb{R}$ si ottiene da quello di f operando una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$.

Più in generale, i concetti del calcolo infinitesimale che introdurremo si potranno interpretare in termini di proprietà geometriche dei grafici delle funzioni di variabile reale e potranno utilizzarsi per capirne le proprietà qualitative e quantitative.

2. Spesso le funzioni di variabile reale vengono assegnate tramite una legge $x \mapsto f(x)$ che coinvolge le operazioni tra numeri reali sopra introdotte, senza specificare esplicitamente il dominio E su cui sono definite: si intende in tal caso che E è il massimo insieme su cui le operazioni scritte si possono svolgere. Ad esempio, scrivendo

$$f(x) = \frac{2x+7}{x-3}$$

si intende che il dominio E di f è dato da $E = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

3. Un modo per generare nuove funzioni a partire da alcune date è quello di utilizzare le operazioni introdotte per i numeri reali. Date due funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$, si dice **funzione somma** di f e g la funzione

$$\begin{aligned} f+g : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)+g(x) \end{aligned}$$

mentre si dice **funzione prodotto** di f e g la funzione

$$\begin{aligned} fg : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)g(x). \end{aligned}$$

Così ad esempio le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = x$ e $g(x) = 7$ ammettono come somma la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = x + 7$ e come prodotto la funzione $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $t(x) = 7x$.

La **funzione differenza** di f e g si definisce in modo simile. Si può parlare di **funzione quoziente** se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$: in tal caso si pone

$$\begin{aligned} f/g : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Si può infine parlare si **funzione potenza** se $f(x) > 0$ per ogni $x \in E$: in tal caso si pone

$$\begin{aligned} f^g : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)^{g(x)}. \end{aligned}$$

4. Una classe importante di funzioni è data dalle **funzioni elementari** che di seguito ricordiamo.

1. **Polinomi**. Si tratta delle applicazioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Il numero n si dice il grado del polinomio così che f è detto **polinomio di grado n nella variabile** x. I polinomi sono le più semplici funzioni che si possono costruire a partire dalla somma e dal prodotto di numeri reali; pertanto essi sono molto studiati in algebra e svolgono un ruolo di rilievo anche in geometria.

2. **Funzioni razionali fratte**. Si tratta delle funzioni del tipo
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus C &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} \end{aligned}$$
dove C è l'insieme delle radici del polinomio che appare a denominatore. Tali funzioni nascono dunque come quozienti di polinomi. Sono esempi di funzioni razionali fratte le funzioni
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^3 + 3x + 2}{x(x-1)} \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$
Diremo che una funzione razionale fratta è propria se il polinomio a numeratore ha grado strettamente minore di quello che compare a denominatore. In base alla divisibilità tra polinomi, si ha che ogni funzione razionale fratta può vedersi come somma di un polinomio e di una funzione razionale fratta propria. Ad esempio si ha
$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

3. **Potenze e radici**. Dalla teoria delle potenze per i numeri reali si ha che risulta ben definita la funzione
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned}$$
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Se $\alpha = 0$, si tratta della funzione costantemente uguale a 1. Nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, otteniamo la funzione radice n-esima: distinguendo tra indice pari e indice dispari, si tratta delle funzioni
$$\begin{aligned} \sqrt[2m]{\cdot} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt[2m]{x} \end{aligned}$$

e (potendosi senza problemi allargare il dominio)

$$\begin{aligned} \sqrt[2m+1]{\cdot} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[2m+1]{x}. \end{aligned}$$

4. **La funzione modulo**: per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il numero $|x|$ si dice il **modulo** di x. Valgono le seguenti proprietà di facile verifica:

(a) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;

(b) se $a \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza $|x| \leq a$ equivale alle relazioni $-a \leq x \leq a$;

(c) se $a \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza $|x| \geq a$ equivale alle relazioni $x \leq -a \cup x \geq a$;

(d) *disuguaglianza triangolare del modulo*: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Diremo **funzione modulo** la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto |x|. \end{aligned}$$

5. **La funzione esponenziale**. Dato $a > 0$, dalla teoria dei numeri reali si ha che risulta ben definita la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned}$$

Tale funzione è detta **funzione esponenziale di base** a. Se $a = 1$, la funzione si riduce alla funzione costante pari a 1. Nel caso in cui la base dell'esponenziale sia il *numero di Nepero* e (che incontreremo più avanti nella teoria dei limiti), si parla di **funzione esponenziale**: si tratta della funzione

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Questa particolare scelta della base si rivela utile in analisi matematica, poiché molte formule del calcolo differenziale e integrale risultano semplificate.

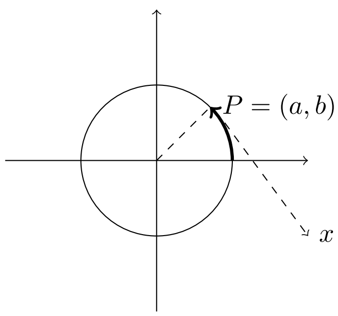
6. **La funzione logaritmica**. Grazie alle proprietà di iniettività e suriettività della funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ con $a \neq 1$, è possibile definire la funzione inversa

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

dove $\log_a x$ è l'unica soluzione dell'equazione $a^y = x$. Tale numero si dice il **logaritmo in base** a di x. Se la base è uguale al numero di Nepero e, si parla di **logaritmo naturale** o semplicemente **logaritmo** e si scrive $\ln x$. La funzione associata si dice la **funzione logaritmica**

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x. \end{aligned}$$

7. **Le funzioni circolari**. Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Percorriamo la circonferenza in senso antiorario a partire dal punto $A = (1, 0)$ muovendoci di un arco di lunghezza x fino ad arrivare nel punto $P = (a, b)$.



Poniamo

$$\cos x = a \qquad \text{e} \qquad \sin x = b.$$

Se x è negativo, conveniamo di percorrere la circonferenza in senso orario e di porre ancora $P = (\cos x, \sin x)$.

Le funzioni

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

si dicono le funzioni **seno** e **coseno**. Si parla anche di **funzioni trigonometriche** o **circolari**, dal momento che il generico punto del cerchio unitario viene parametrizzato tramite esse: vale così la relazione fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Diciamo funzione **tangente** l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

Le restrizioni di seno e coseno su $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[0, \pi]$ sono biettive a valori su $[-1, 1]$: è possibile dunque definire le funzioni inverse **arcoseno** e **arcocoseno**

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1, 1] & \to & [-\pi/2, \pi/2] \\ \arccos : [-1, 1] & \to & [0, \pi] \end{array}$$

determinate dalla proprietà

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

e

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Similmente, la funzione tangente è biettiva tra $]-\pi/2, \pi/2[$ a valori in $\mathbb{R}$: è possibile pertanto definire la funzione inversa **arcotangente**

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$$

determinata dalla proprietà

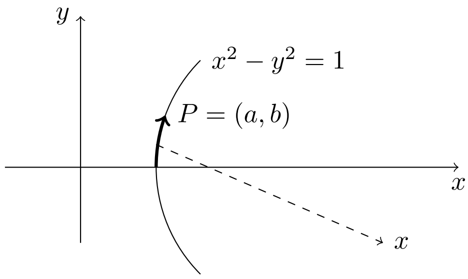
$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

8. **Le funzioni iperboliche**. Definiamo le funzioni **seno iperbolico** e **coseno iperbolico** tramite le formule

$$\begin{array}{rcl} \sinh : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \cosh : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$



Si parla di funzioni iperboliche poiché il generico punto P del ramo d'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ che giace nel primo quadrante ha coordinate $(\cosh s, \sinh s)$ dove s misura la lunghezza dell'arco PA con $A = (1, 0)$ misurato positivamente salendo nel primo quadrante. Si ha dunque un perfetto parallelismo con le funzioni circolari.

Vale la relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

2.6 Estremi di una funzione

In questa sezione introduciamo le nozioni di massimo e minimo di una funzione, con i relativi punti di estremo associati. Nel caso in cui essi non esistano, parleremo di estremi superiore ed inferiore della funzione.

1. I valori massimo e minimo di una funzione con i relativi punti di estremo sono definiti nel seguente modo.

Definizione 2.13 (Massimo e minimo assoluti). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione.*

(a) Diciamo che $x_0 \in E$ è **punto di minimo** *di f su E se*

$$\forall x \in E \, : \, f(x_0) \leq f(x).$$

In tal caso si dice che f **ammette minimo** *su E ed il valore corrispondente si indica con*

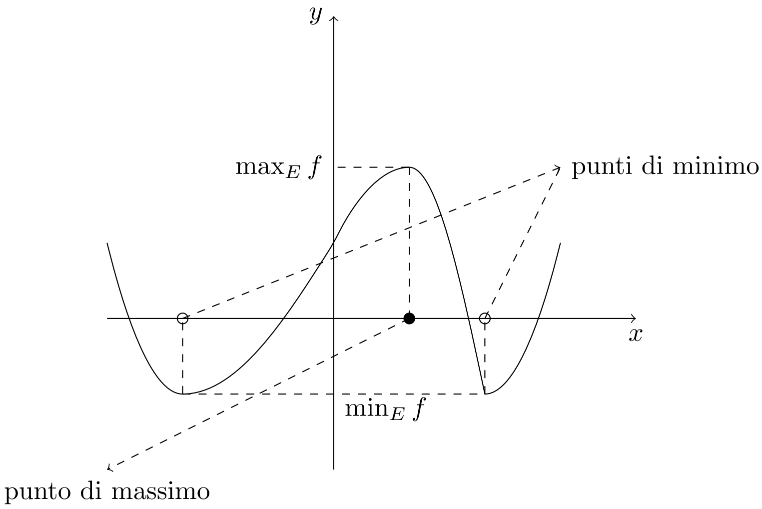
$$\min_E f.$$

(b) Diciamo che $x_0 \in E$ è **punto di massimo** *di f su E se*

$$\forall x \in E \, : \, f(x) \leq f(x_0).$$

In tal caso si dice che f **ammette massimo** *su E ed il valore corrispondente si indica con*

$$\max_E f.$$



I punti di massimo e minimo di f su E si dicono **punti di estremo di** f.

Esempio 2.14. La funzione $x \mapsto \sin x$ ammette infiniti punti di massimo e minimo: i punti di massimo sono quelli della forma $x = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e quelli di minimo sono della forma $x = 3/2\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 2.15. La funzione $x \mapsto x^2$ ammette $x = 0$ come punto di minimo, ma non ha massimo.

2. Le nozioni di massimo e minimo possono localizzarsi nel seguente modo.

Definizione 2.16 (Punti di estremo locale). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in E$.*

(a) Diciamo che x_0 è un **punto di minimo locale per** f *se esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

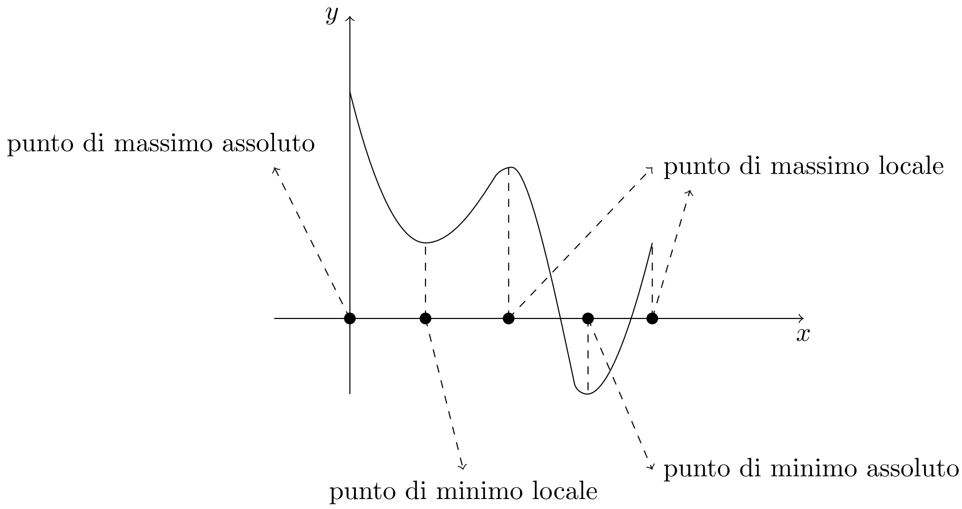
$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap E \,:\, f(x_0) \leq f(x).$$

(b) Diciamo che x_0 è un **punto di massimo locale per** f *se esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap E \,:\, f(x) \leq f(x_0).$$

Se x_0 è un punto di minimo o massimo locale, si dice che x_0 è un **punto di estremo locale**.

Notiamo che i punti di estremo di f su E (se esistono) sono chiaramente di estremo locale; il viceversa non è vero in generale. I punti di estremo locale si dicono anche di estremo *relativo*.



3. Notiamo che se f ammette massimo su E si ha

$$\max_E f = \max f(E)$$

e similmente, se f ammette minimo su E si ha

$$\min_E f = \min f(E).$$

Come nel caso degli insiemi, se i valori massimo e minimo di una funzione non esistono, si parla estremi superiore ed inferiore. La definizione è la seguente.

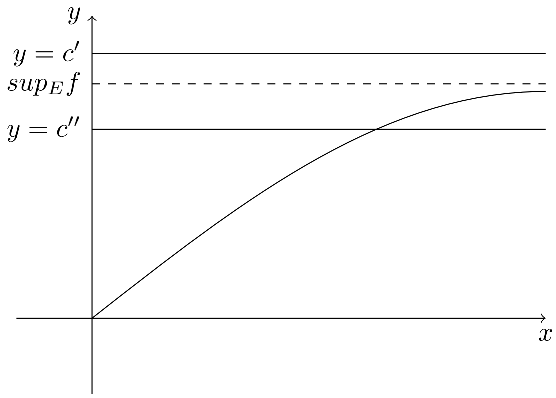
Definizione 2.17. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo estremo superiore di f su E l'elemento* $\sup_E f \in \overline{\mathbb{R}}$ *dato da*

$$\sup_E f = \sup f(E).$$

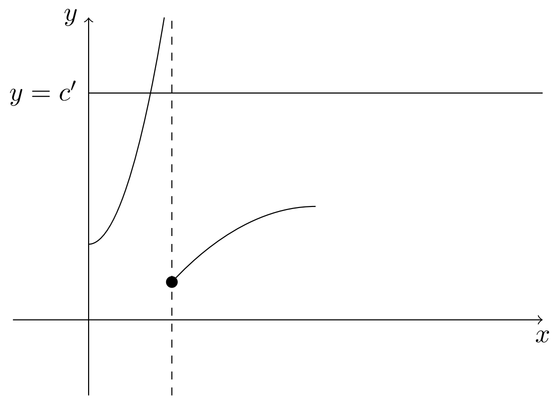
Diciamo estremo inferiore di f su E l'elemento $\inf_E f \in \overline{\mathbb{R}}$ *dato da*

$$\inf_E f = \inf f(E).$$

Osservazione 2.18. Da un punto di vista geometrico, $\sup_E f$ si caratterizza in questo modo. Se risulta finito, si tratta della soglia tale che ogni retta $y = c'$ con $c' > \sup_E f$ non interseca il grafico di f, mentre ogni retta $y = c''$ con $c'' < \sup_E f$ è tale che esistono punti del grafico di f sopra di essa.



Se risulta infinito, significa che fissata una qualsiasi retta orizzontale $y = c'$, ci sono punti del grafico di f che si trovano sopra di essa.



Un'interpretazione geometrica simile vale per $\inf_E f$.

Osservazione 2.19. Chiaramente, f ammette massimo su E se e solo se $\sup_E f \in \mathbb{R}$ ed esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = \sup_E f$. In tal caso $\sup_E f = \max_E f$. Similmente f ammette minimo su E se e solo se $\inf_E f \in \mathbb{R}$ ed esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = \inf_E f$. In tal caso $\inf_E f = \min_E f$.

Si pone la seguente definizione.

Definizione 2.20 (Funzioni limitate e illimitate). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione.*

(a) f si dice limitata superiormente su E se $\sup_E f \in \mathbb{R}$.

(b) f si dice limitata inferiormente su E se $\inf_E f \in \mathbb{R}$.

(c) f si dice illimitata superiormente su E se $\sup_E f = +\infty$.

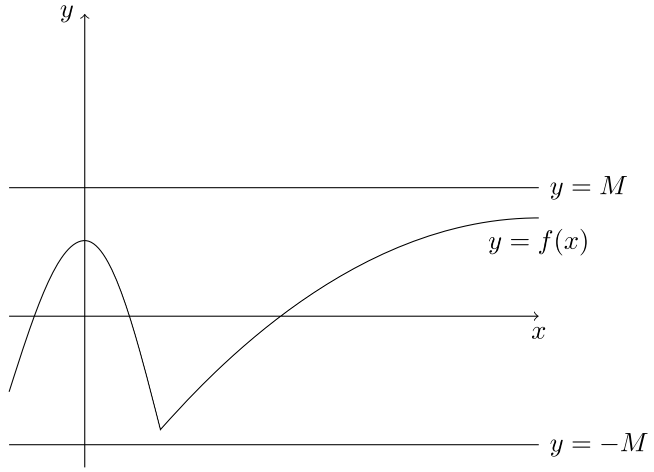
(d) f si dice illimitata inferiormente su E se $\inf_E f = -\infty$.

(e) *f si dice limitata su E se è limitata sia superiormente che inferiormente, cioè se $\inf_E f \in \mathbb{R}$ e $\sup_E f \in \mathbb{R}$.*

Osservazione 2.21. Notiamo che f è limitata se e solo se esiste $M > 0$ tale che

$$\forall x \in E : -M \leq f(x) \leq M.$$

Da un punto di vista geometrico, ciò significa che il grafico di f è contenuto nella striscia determinata dalle rette orizzontali $y = -M$ e $y = M$.



Esercizi

1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$: dimostrare che $\sup A \leq \inf B$.

2. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, poniamo $A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b, a \in A, b \in B\}$. Se A, B sono limitati superiormente, dimostrare che

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B,$$

mentre se A, B sono limitati inferiormente

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

3. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e definito $A + B$ come nell'esercizio precedente, dimostrare che se A è illimitato superiormente/inferiormente, allora anche $A + B$ è illimitato superiormente/inferiormente.

4. Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ammette minimo.

5. Dimostrare che $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente.

6. Dimostrare la proprietà archimedea di $\mathbb{N}$.

7. Dimostrare che $\mathbb{Q} \cap]a, b[\neq \emptyset$ per ogni intervallo $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

8. Dimostrare che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è l'estremo superiore di f su E se e solo se

   (a) per ogni $x \in E$ si ha $f(x) \leq l$;

   (b) per ogni $l' < l$ esiste $x \in E$ tale che $l' < f(x)$.

   Dimostrare similmente che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è l'estremo inferiore di f su E se e solo se

   (a) per ogni $x \in E$ si ha $l \leq f(x)$;

   (b) per ogni $l' > l$ esiste $x \in E$ tale che $f(x) < l'$.

9. Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f < g$ su E. Dimostrare che

$$\inf_E f \leq \inf_E g \qquad \text{e} \qquad \sup_E f \leq \sup_E g.$$

   Mostrare con esempi che le precedenti relazioni possono valere con il segno dell'uguaglianza.

10. Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni. Dimostrare che

$$\inf_E f + \inf_E g \leq \inf_E (f + g) \qquad \text{e} \qquad \sup_E (f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g.$$

   Mostrare con esempi che le precedenti relazioni possono valere con il segno di disuguaglianza stretta.