Capitolo 6

Serie numeriche

Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, vogliamo dare un senso, se possibile, alla somma infinita

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

che indicheremo con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Similmente, scriveremo $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ per la somma infinita (da definirsi opportunamente) $a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$.

1. Poniamo dunque la seguente definizione.

Definizione 6.1 (Serie convergenti, divergenti ed oscillanti). *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Poniamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$$

se il limite esiste e diciamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la serie associata alla successione.

(a) Diremo che la serie è convergente e ammette per somma $S \in \mathbb{R}$ se il limite è finito e vale S.

(b) Diremo che la serie diverge positivamente o negativamente se il limite vale $+\infty$ o $-\infty$.

Se il limite non esiste, diremo che la serie oscilla.

Le definizioni precedenti si adattano subito al caso delle serie del tipo $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$.

Definizione 6.2 (Ridotte di una serie). *Poniamo*

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

e diciamo S_k la somma parziale k-esima o ridotta k-esima della serie.

Osservazione 6.3. Il carattere di una serie dipende dunque dal comportamento della successione $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ delle sue ridotte per $k \to +\infty$.

2. Diremo che due serie hanno lo stesso carattere se sono entrambe convergenti, o divergenti o oscillanti. Valgono le seguenti proprietà .

   Proposizione 6.4 (Proprietà elementari). *Valgono i seguenti fatti.*

   (a) Il carattere di una serie non si altera moltiplicando tutti i termini per un coefficiente $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$; nel caso in cui la serie non sia oscillante, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

   (b) Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Dunque il carattere di una serie non cambia se si omettono un numero finito di addendi.

   (c) Date due serie non oscillanti $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, non divergenti in senso discorde, vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

6.1 Alcuni esempi notevoli

Vediamo due esempi notevoli di serie numeriche: la serie geometrica e quella telescopica.

1. Consideriamo $q \in \mathbb{R}$ e la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

   cioè la somma infinita

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

   Tale serie è detta la *serie geometrica di ragione q*. Sappiamo che se $q \neq 1$ si ha

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Se invece $q = 1$, si ha banalmente $S_k = k + 1$. Dunque si ha

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Abbiamo dunque il seguente risultato.

Proposizione 6.5 (Convergenza della serie geometrica). *La serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$ è convergente se e solo se $|q| < 1$ ed in tal caso ha per somma $1/(1-q)$. Se $q \geq 1$ la serie diverge positivamente, mentre se $q \leq -1$ la serie oscilla.*

2. Consideriamo serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}),$$

dove $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione numerica. Le serie di questo tipo si dicono *telescopiche*. Vale il seguente risultato.

Proposizione 6.6 (Carattere delle serie telescopiche). *Consideriamo la serie telescopica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$$

e supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$. *Valgono allora i seguenti fatti.*

(a) Se $l \in \mathbb{R}$, allora la serie converge e

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - l.$$

(b) Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, la serie diverge negativamente o positivamente.

Se $\lim_{n\to+\infty} b_n$ *non esiste, la serie è oscillante.*

Dimostrazione. Calcolare la ridotta k-esima della serie è semplice essendo

$$S_k = \sum_{n=0}^{k}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + \cdots + b_k - b_{k+1} = b_0 - b_{k+1}.$$

Ricaviamo che il comportamento di S_k dipende da $\lim_{k\to+\infty} b_{k+1} = \lim_{n\to+\infty} b_n$. La tesi segue facilmente. $\square$

3. Vale il seguente risultato.

Proposizione 6.7 (Condizione necessaria per la convergenza). *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali tale che* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *sia convergente. Allora*
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Notiamo che
$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$
Per ipotesi si ha
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R},$$
da cui
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = S - S = 0.$$
■

4. Il fatto che a_n sia infinitesima per $n \to +\infty$ è condizione necessaria ma non sufficiente a garantire la convergenza della serie associata: il controesempio classico è dato dalla *serie armonica.*

Esempio 6.8 (La serie armonica). La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$
che è detta la *serie armonica.* Nonostante
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$
vedremo più avanti (Osservazione 7.49) che la serie armonica non è convergente, anzi diverge positivamente.

Esempio 6.9 (Serie armonica generalizzata). La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$
è detta la serie armonica generalizzata. Vedremo più avanti (vedi Osservazione 7.49) che essa converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

Più in generale la serie (vedi Osservazione 7.50)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$
converge se e solo se
$$\begin{cases} \alpha > 1 \text{ e per ogni } \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1. \end{cases}$$

6.2 Criteri di convergenza

Notiamo che se una serie è convergente con somma S, allora

$$S = \lim_{k\to+\infty} S_k.$$

Per ottenere la somma, dobbiamo dunque calcolare il valore del limite della successione delle ridotte k-esime. La difficoltà fondamentale nello studio delle serie risiede nel fatto che il calcolo esplicito di S_k è possibile solo per tipi di serie molto speciali (ad esempio le serie geometriche e telescopiche viste in precedenza): ci si trova dunque a dover valutare il limite di una successione che non si riesce a determinare esplicitamente.

Vista tale difficoltà , si cerca in prima battuta di stabilire almeno *il carattere della serie*, cioè se il limite $\lim_{k\to+\infty} S_k$ è finito oppure infinito. Si vuol fare questo a partire dall'analisi del termine generale a_n della serie (l'unico noto esplicitamente), formulando dei *criteri di convergenza*. Nel caso in cui la serie risulti convergente, si può pensare ad un modo per approssimare la somma: questo coinvolge in generale argomenti di Analisi Numerica.

6.2.1 Serie a termini non negativi

In questa sezione ci occupiamo delle serie a termini non negativi, cioè delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{con } a_n \geq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per esse è possibile stabilire dei criteri per dedurre il loro carattere.

1. Vale il seguente risultato.

   Proposizione 6.10 (Carattere delle serie a termini non negativi). *Una serie a termini non negativi o è convergente o è divergente positivamente.*

   Dimostrazione. La successione delle ridotte S_k risulta monotona crescente: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}$

   $$S_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = a_{k+1} + \sum_{n=0}^{k} a_n = a_{k+1} + S_k \geq S_k.$$

   Dunque $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ risulta o convergente o divergente positivamente. □

2. Il primo criterio di convergenza per serie a termini non negativi è quello del confronto.

   Proposizione 6.11 (Criterio del confronto). *Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$*

   $$a_n \leq b_n.$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

In particolare:

(a) *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è convergente, allora anche* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente;*

(b) *se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente, allora anche* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *diverge positivamente.*

Dimostrazione. Siano $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(S'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la successione delle ridotte k-esime delle due serie. Si ha chiaramente $0 \leq S_k \leq S'_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre sappiamo che le due successioni ammettono limite per $k \to +\infty$ e che per confronto

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} S_k \leq \lim_{k\to+\infty} S'_k,$$

cioè la tesi è dimostrata. ∎

Esempio 6.12. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. Poiché si ha

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

e la serie associata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente (serie geometrica di ragione 1/2), si ricava per confronto che anche la serie iniziale è convergente.

3. Il seguente criterio è fondamentale nelle applicazioni.

Proposizione 6.13 (Criterio del confronto asintotico). *Siano* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini non negativi e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *una serie a termini positivi. Se*

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty,$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Sia

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \,]0, +\infty[.$$

Per la definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$

$$l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon.$$

Essendo $0 < l < +\infty$, possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Dunque esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$

$$l - \frac{1}{2}l < \frac{a_n}{b_n} < l + \frac{1}{2}l$$

da cui

$$\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n.$$

Deduciamo allora

$$\frac{1}{2}l\sum_{n=N}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \leq \frac{3}{2}l\sum_{n=N}^{+\infty} b_n.$$

La tesi discende allora dal criterio del confronto e dal fatto che omettere un numero finito di indici in una serie numerica non ne altera il carattere. ■

Osservazione 6.14. Il criterio del confronto asintotico viene utilizzato nello studio delle serie modificando il termine generale a_n in un termine equivalente b_n la cui serie associata è più semplice da studiare. L'equivalenza verrà indicata con la scrittura $a_n \sim b_n$. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Notiamo che

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin\frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie ha dunque termini positivi per n abbastanza grande. Dunque la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

ed è pertanto convergente.

4. Passiamo ora al criterio del rapporto.

Proposizione 6.15 (Criterio del rapporto). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora valgono i seguenti fatti.*

(a) Se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

la serie è convergente.

(b) Se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

la serie diverge positivamente.

Dimostrazione. Consideriamo il caso (a). Sia $q > 0$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1.$$

Per la definizione di limite, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Si ottiene dunque per ogni $n \geq N$

$$a_{n+1} < qa_n < q^2 a_{n-1} < \cdots < q^{n+1-N} a_N$$

da cui

$$a_n \leq q^{n-N} a_N.$$

Dunque la serie $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N} a_N = a_N q^{-N} \sum_{n=N}^{+\infty} q^n$$

che risulta convergente essendo geometrica di ragione $q \in]0,1[$. Ricaviamo dunque che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge ed il punto (a) è dimostrato.

Passiamo al caso (b). Sia q tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1.$$

Per la definizione di limite, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q.$$

Si ottiene dunque per ogni $n \geq N$

$$a_{n+1} > qa_n > q^2 a_{n-1} > \cdots > q^{n+1-N} a_N$$

da cui

$$a_n \geq q^{n-N} a_N.$$

Dunque la serie $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ è minorata dalla serie

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N} a_N = q^{-N} a_N \sum_{n=N}^{+\infty} q^n$$

che risulta divergente positivamente essendo geometrica di ragione $q > 1$. Ricaviamo dunque che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente ed il punto (b) è dimostrato. ∎

Esempio 6.16. Vediamo due applicazioni notevoli del criterio del rapporto.

(a) Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Dunque il limite del rapporto esiste e vale $1/e$: essendo tale valore minore di 1, per il criterio del rapporto la serie è convergente.

(b) Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a \geq 0$$

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Per il criterio del rapporto la serie è convergente.

Osservazione 6.17 (Confronto tra infiniti per potenze e fattoriali). Grazie alla convergenza delle serie dell'esempio precedente, deduciamo (grazie alla condizione necessaria di convergenza) che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$
dove $a > 0$. Rimangono dunque stabiliti dei *confronti tra infiniti* per le successioni $n^n, n!$ e a^n.

Osservazione 6.18. Notiamo che il criterio del rapporto applicato alle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

produce come limite 1: nel primo caso la serie è convergente, mentre nel secondo diverge positivamente. Dunque concludiamo che *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

nulla si può concludere sul carattere della serie.

5. Il criterio della radice n-esima è il seguente.

Proposizione 6.19 (Criterio della radice n-esima). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora valgono i seguenti fatti.*

(a) Se

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

la serie è convergente.

(b) Se

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

la serie diverge positivamente.

Dimostrazione. Vediamo il caso (b). Supponiamo che $q > 1$ sia tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > q.$$

Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq N$

$$\sqrt[n]{a_n} > q$$

e cioè

$$a_n > q^n.$$

Dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e non può valere la condizione necessaria di convergenza $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$: di conseguenza si ha che la serie diverge positivamente ed il punto (b) è dimostrato.

Passiamo al punto (a). Sia $0 < q < 1$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

da cui

$$a_n < q^n.$$

Dunque la serie $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ è maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum_{n=N}^{+\infty} q^n$. Concludiamo dunque che la serie è convergente e la dimostrazione è conclusa. ∎

Esempio 6.20. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}, \qquad x \geq 0.$$

Applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$$

per cui la serie risulta convergente.

Osservazione 6.21. Come nel caso del criterio del rapporto, si ha che *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

nulla si può concludere sul carattere della serie.

6.2.2 Serie a termini di segno alterno

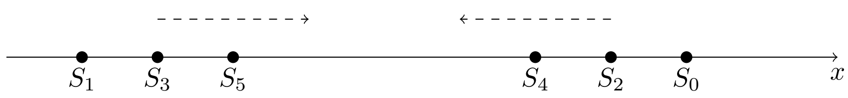
Le serie a termini di segno alterno sono quelle del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n \qquad \text{con } b_n \geq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per esse vale il seguente criterio di convergenza.

Proposizione 6.22 (Criterio di Leibnitz). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ una serie a termini di segno alterno. Se la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima, allora la serie converge.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ delle ridotte.



Notiamo che

$$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \cdots \geq S_{2k} \geq \dots$$

e

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_{2k+1} \leq \dots$$

cioè le ridotte di indice pari formano una successione decrescente mentre quelle di indice dispari formano una successione crescente. Infatti, essendo la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente si ha

$$\begin{aligned} S_2 &= S_0 - b_1 + b_2 &&\leq S_0 \\ S_4 &= S_2 - b_3 + b_4 &&\leq S_2 \\ &\vdots \\ S_{2m+2} &= S_{2m} - b_{2m+1} + b_{2m+2} &&\leq S_{2m}. \end{aligned}$$

Similmente si prova che le ridotte di indice dispari formano una successione crescente. Grazie alla monotonia, esistono i limiti

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m} = S' \qquad \text{e} \qquad \lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} = S''.$$

Notiamo poi che

$$S_1 \leq S_{2m+1} = S_{2m} - b_{2m+1} \leq S_0.$$

Essendo b_n infinitesima, si ha anche $b_{2m+1} \to 0$: grazie alla relazione precedente si ha $S' = S''$ e, indicando con S il valore comune, otteniamo anche

$$S_1 \leq S \leq S_0.$$

Concludiamo dunque che

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = S \in \mathbb{R}$$

e dunque la serie a termini di segno alterno è convergente. ■

Esempio 6.23. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Poiché la successione $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima, la serie risulta convergente grazie al criterio di Leibnitz.

6.2.3 Serie a termini di segno generale

Stabiliamo ora un criterio di convergenza per serie i cui termini non siano sottoposti a restrizioni di segno. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 6.24 (Convergeza assoluta). *Diremo che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad \textit{è convergente,}$$

cioè se converge la serie dei valori assoluti dei suoi termini.

La convergenza di una serie è detta talvolta *convegenza semplice* per distinguerla da quella assoluta. Vale il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 6.25 (Convergenza assoluta implica convergenza semplice). *Una serie convergente assolutamente è convergente.*

Osservazione 6.26 (La convergenza semplice non implica l'assoluta). Notiamo che una serie convergente non è necessariamente assolutamente convergente. Infatti la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

risulta convergente per il criterio di Leibniz, mentre la serie dei moduli risulta divergente essendo essa data dalla serie armonica.

Esercizi

1. Trovare due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ a termini non negativi che siano rispettivamente convergente e divergente e tali che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1.$$

2. Dimostrare la seguente variante del criterio del confronto asintotico.
   (a) Se
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty,$$
   allora se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
   (b) Se
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0,$$
   allora se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge positivamente anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.

3. Dimostrare il seguente criterio dovuto a Cauchy.

   Criterio di Condensazione di Cauchy. Sia a_n positivo e decrescente. Posto $b_n = 2^n a_{2^n}$, si ha che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ ha lo stesso carattere.

4. Applicare il criterio di condensazione di Cauchy per dedurre il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$
al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5. Trovare una successione positiva ed infinitesima $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ non converge.

6. Dimostrare la seguente relazione dovuta ad Abel. Dati $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ numeri reali (o complessi) e posto
$$a_i' = a_{i+1} - a_i \qquad \text{e} \qquad B_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$$
si ha
$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = a_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_i' B_i.$$

7. Dimostrare il seguente criterio di Abel-Dirichlet: siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente ed infinitesima e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata (B_i è la ridotta i-esima della serie $\sum_n b_n$). Allora la serie $\sum_n a_n b_n$ risulta convergente.

8. Verificare che il criterio di Leibnitz è un caso particolare del criterio di Abel-Dirichlet.

9. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente ed infinitesima. Verificare che le serie

$$\sum_n a_n \sin(n\vartheta) \qquad \text{e} \qquad \sum_n a_n \cos(n\vartheta)$$

sono convergenti per $\vartheta \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. (Suggerimento: per calcolare $\sum_{k=1}^n \sin(k\vartheta))$ o $\sum_{k=1}^n \cos(k\vartheta))$ per applicare il criterio di Abel-Dirichlet, calcolare $\sum_{k=1}^n e^{ik\vartheta}$ e dividere poi in parte reale e parte immaginaria.)