Cognome e nome .... Firma ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Prima prova di Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

PUNTEGGI: **Esercizi 1-5**: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
Esercizio 6: risposta esatta = +1; risposta sbagliata = −0.25; risposta non data = 0.

---

1. Le radici quarte del numero complesso

$$\frac{(1-2i)|1+i|}{2+i}$$

sono date da

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\{\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{7}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{11}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{15}{8}\pi}\}$ $\boxed{\text{B}}$: $\{\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{11}{4}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{15}{4}\pi}\}$
$\boxed{\text{C}}$: $\{\sqrt[8]{2}e^{i\frac{3}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{5}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{11}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{13}{8}\pi}\}$ $\boxed{\text{D}}$: $\{\sqrt[8]{2}e^{i\frac{5}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{9}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{11}{8}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{15}{8}\pi}\}$

---

2. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x}-e^{3\sin x}}{x^3 - x^4 \ln\frac{4}{x}}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{1}{6}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{1}{3}$

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{[(n+1)! + 2^n](n+7)^\alpha}{(n+2)! + \cos^2(2n)}\right)$$

converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < 7$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 2$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 0$

---

4. Siano $\alpha < 2$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2(1+x)-x^3}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ 7x^3 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Allora in $x_0 = 0$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f è derivabile per $\alpha \leq 1$ e ammette un punto angoloso per $\alpha > 1$ $\boxed{\text{B}}$: f è derivabile per $\alpha < 1$ e ammette un punto angoloso per $\alpha \geq 1$ $\boxed{\text{C}}$: f è derivabile per $\alpha \leq 1$ e ammette un punto di cuspide per $\alpha > 1$ $\boxed{\text{D}}$: f è derivabile per $\alpha > 1$ e ammette un punto di cuspide per $\alpha \leq 1$

---

5. Sia $y(x) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \frac{2x}{x^2+4} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\arctan\frac{\pi}{2}$

---

6. Sia data la funzione

$$f(x) = x^3 - 4x^2.$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $x_0 = 0$ è un massimo locale $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) La retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 4$ è data da $y = 4^2 x$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) L'area della regione limitata del piano compresa tra il grafico di f e l'asse x è pari a $\frac{4^3}{12}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) $x_0 = \frac{4}{3}$ è un punto di flesso $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) $f^{-1}(]-\infty, 0]) =]-\infty, 4]$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
