

Cognome e nome Firma Matricola

Corso di Laurea

Prima prova di Analisi Matematica I

31 agosto 2021

Tempo a disposizione: 1 ora e 15 minuti

Soglia di superamento: 16 punti

Esercizio 1 (6 punti) Descrivere il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{1}{e^{i\pi/2}} z^2 \bar{z} + e^{-3i\pi} \operatorname{Im}(z) = e^{\frac{3}{2}\pi i} |z|^2 \operatorname{Re}(z)$$

Esercizio 2 (6 punti). Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\log(1+3x)) - e^{3x} + \cos x}{(\sin x)^{5\alpha}}$$

Esercizio 3 (6 punti). Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^{\frac{7}{2}} + n^2)}{n^\alpha [\sqrt{n + \log^2 n} - \sqrt{n}]}$$

converge assolutamente.

Esercizio 4 (6 punti) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) y = x + 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 5 (6 punti). Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{2}{e^x - 1} + \ln |e^x - 1|$$

- Calcolare $f'(1)$.
- Determinare i punti di estremo locale di f e classificarli.
- Determinare gli asintoti e disegnare un grafico approssimativo della funzione.