Cognome e nome .... Firma ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Prima prova di Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

PUNTEGGI: **Esercizi 1-5**: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0. **Esercizio 6**: risposta esatta = +1; risposta sbagliata = −0.25; risposta non data = 0.

---

1. Il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$Re\left[1 + i(z\bar{z})^7\right] < Im\left(\frac{z}{z+i} + 7\right)$$

è dato da

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: una coppia di rette $\boxed{\text{B}}$: un cerchio esclusa la circonferenza $\boxed{\text{C}}$: una semiretta $\boxed{\text{D}}$: una circonferenza

---

2. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1 + 2x^2}{x^4 + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: -2 $\boxed{\text{B}}$: 2 $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: 0

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{\alpha-2}{n}\right) \frac{12(n+3)! + \ln^{10} n}{8^n + n!}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: -3 se $\alpha = 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$, $-\infty$ se $\alpha < 3$ $\boxed{\text{B}}$: 2 se $\alpha = 3$, $+\infty$ se $\alpha \neq 3$ $\boxed{\text{C}}$: -2 se $\alpha = 3$, $-\infty$ se $\alpha \neq 3$ $\boxed{\text{D}}$: -2 se $\alpha = 3$, $-\infty$ se $\alpha > 3$, $+\infty$ se $\alpha < 3$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \left[\ln\left(x^3 + \frac{x^{4+\alpha}}{\ln^2 x}\right) - 3\ln x\right] dx$$

converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > -2$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 3$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq -2$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \leq -1$

---

5. Sia $y : I \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-2y}\sin x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Allora $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $e^{-2\pi}$ $\boxed{\text{B}}$: $\ln\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{2}\ln 2$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{2}\ln 3$

---

6. Sia data la funzione f definita da

$$f(x) = 3 + \ln\left(\frac{x+2}{|x-1|}\right)$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) Il dominio di f è dato da $]-2,+\infty[$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) f ammette asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) f ammette due asintoti verticali $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) f è decrescente su $]-2,1[$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) L'equazione $f(x) = k$ ammette una ed una sola soluzione per $k > 3$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
