Cognome e nome .... Firma ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Prima prova di Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

PUNTEGGI: **Esercizi 1-5**: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0. **Esercizio 6**: risposta esatta = +1; risposta sbagliata = −0.25; risposta non data = 0.

---

1. Il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che il numero
$$|z+2|^2 + (z-2i)^2$$
è reale e non negativo è dato da

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: una retta $\boxed{\text{B}}$: l'unione di una retta e una circonferenza $\boxed{\text{C}}$: l'unione di una retta e una semiretta $\boxed{\text{D}}$: l'unione di una circonferenza e di una semiretta

---

2. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - 1}{\left[e^{\frac{2}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right]^2} \left(\frac{n!+4}{n!+2}\right)^{n!+1}$$
vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{3}{2}e^2$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{5}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{2}e^4$

---

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$f(x) = (x^2-49)^{\frac{1}{3}} |\sin(x-7)|.$$
Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $f'(7) = 0$ e $f'(-7) = +\infty$ $\boxed{\text{B}}$: $f'(7) = +\infty$ e $f'(-7) = -\infty$ $\boxed{\text{C}}$: $f'(7) = 0$ e $f'(-7) = 0$ $\boxed{\text{D}}$: $f'(7) = 0$ e $f'(-7) = -\infty$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie numerica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n!+7}{(n+2)!}\right)^{2\alpha} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \arctan\frac{1}{n}\right)$$

converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > -\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < \frac{1}{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > -\frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < -3$

---

5. Sia $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = \frac{4}{x^2} \ln^2 x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Allora $y(e)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{\ln 4}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{3e}$ $\boxed{\text{C}}$: $4e^2$ $\boxed{\text{D}}$: e

---

6. Sia data la funzione

$$f(x) = x - \arctan(x - 2)$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $dom(f) = \mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) $y = x - \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) La retta tangente in $x = 0$ è data da $y = \frac{4}{5}x + \arctan 2$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) f è convessa per $x \geq 2$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) La funzione $y = |f(x)|$ ammette un punto angoloso $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
