Cognome e nome..Firma..........................

Matricola ....Corso di Laurea ....

Prima prova di Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

PUNTEGGI: **Esercizi 1-5**: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0. **Esercizio 6**: risposta esatta = +1; risposta sbagliata = −0.25; risposta non data = 0.

---

1. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che
$$\frac{z}{iz+4} = \left|\frac{\bar{z}}{z}\right|$$
Le radici cubiche di z sono date da
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\left\{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\frac{3}{4}\pi}, \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\frac{7}{4}\pi}\right\}$ $\boxed{\text{B}}$: $\left\{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\frac{3}{4}\pi}, \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\frac{17}{12}\pi}\right\}$
$\boxed{\text{C}}$: $\left\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3}{4}\pi}, e^{i\frac{7}{4}\pi}\right\}$ $\boxed{\text{D}}$: $\left\{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{13}{18}\pi}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{25}{18}\pi}\right\}$

---

2. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}(n! - \log n)\left(\frac{n}{2}-1\right)}{[(n+3)! - n!]\left(e^{7/n} - 1 - \sin\left(\frac{7}{n}\right)\right)}$$
vale
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{e^4}{49}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{e^2}{7}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{e^4}{7}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{49}$

---

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - \cos x)\sin(7x)}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \\ (\alpha+1)x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$
Allora f è derivabile in $x = 0$ se e solo se
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha = -2$ e $f'(0) = -1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha = -2$ e $f'(0) = 0$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha = -1$ e $f'(0) = 1$
$\boxed{\text{D}}$: $\alpha = -1$ e $f'(0) = 0$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{(\sinh x)^{2\alpha} \left[\ln(1+7x)\right]^{\frac{3}{2}}} \, dx$$

converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 4$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < \sinh 4$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 0$

---

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{y(1-e^{-x})} \\ \\ y(\ln 2) = -2\,. \end{cases}$$

Allora $y(1)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-4\ln(e-1)+2$ $\boxed{\text{B}}$: $\sqrt{4\ln(e-1)}$ $\boxed{\text{C}}$: $\sqrt{2\ln(e-1)+2}$ $\boxed{\text{D}}$: $-\sqrt{4\ln(e-1)+4}$

---

6. Sia data la funzione

$$f(x) = e^x \frac{x+1}{x+2}$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\ln(2)\}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) $\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) f ammette asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) La retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = -1$ è data da $y = e^{-1}(x+1)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) L'equazione $f(x) = 2$ ammette tre soluzioni $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
