Cognome e nome .... Firma ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Prima prova di Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

PUNTEGGI: **Esercizi 1-5**: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0. **Esercizio 6**: risposta esatta = +1; risposta sbagliata = −0.25; risposta non data = 0.

---

1. Sia
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, Im\left(|4e^{\frac{\pi}{4}i}| i\bar{z} + |z|^2 \right) Re\left(\frac{i|z|+1}{|z|+i} \right) \le 0 \right\}.$$
Le radici cubiche del numero $7^3 e^{\frac{3}{2}\pi i}$ appartenenti all'insieme A sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\{7i, 7e^{\frac{11}{6}\pi i}\}$ $\boxed{\text{B}}$: $\{7e^{\frac{5}{6}\pi i}, 7e^{\frac{7}{6}\pi i}\}$ $\boxed{\text{C}}$: $\{7i, 7e^{\frac{7}{6}\pi i}\}$ $\boxed{\text{D}}$: $\{7e^{\frac{7}{6}\pi i}, 7e^{\frac{11}{6}\pi i}\}$

---

2. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+1)\ln\frac{n^2-1}{n^2+1} + 2n^2(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)}{\frac{1}{n^3} + \sin\frac{2}{2n^2+7}}$$
vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: -1 $\boxed{\text{C}}$: -2 $\boxed{\text{D}}$: $-\infty$

---

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2-4} - 1}{(x+2)|x-2|} & \text{se } x \ne \pm 2 \\[2ex] -1 & \text{se } x = \pm 2 \end{cases}$$
Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $x = -2$ è un punto di continuità e $x = 2$ è un punto di salto $\boxed{\text{B}}$: $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di continuità $\boxed{\text{C}}$: $x = -2$ è un punto di salto e $x = 2$ è un punto di continuità $\boxed{\text{D}}$: $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di salto

---

4. Sia $\alpha \geq 0$. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(n+1)! + \arctan n^n}{(n^\alpha + 7)n! \ln^2(n+1)}$$

è convergente se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \geq 2$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq 3$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq 5$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \geq 4$

---

5. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2}{x^2+1}\, y^2\,, \\ \\ y(0) = \frac{1}{3}\,. \end{cases}$$

Allora $\tilde{y}(1)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{4}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{3\pi}$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{3\pi}$

---

6. Sia data la funzione

$$f(x) = 2 \arctan |x| + x - 2 \ln(1 + x^2).$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $dom(f) = \mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) f ammette asintoti obliqui $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) $x = 0$ è punto angoloso $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) Il punto $x = 3$ è un massimo locale $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) L'equazione $f'(x) = 0$ ammette tre soluzioni non nulle $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
