

Cognome e nome Firma

Matricola Corso di Laurea

Prima prova di Analisi Matematica I

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

- Svolgere gli esercizi sui fogli di protocollo e segnare le risposte sul presente foglio.
- PUNTEGGI: Esercizi 1-5: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = -0.5; risposta non data = 0. Esercizio 6: risposta esatta = +1; risposta sbagliata = -0.25; risposta non data = 0. Lo svolgimento dell'esercizio è parte integrante della risposta. Soglia di ammissione alla prova di teoria: 14,5.
- Consegnare il presente foglio e tutti i fogli dello svolgimento.
- Vietato utilizzare libri, appunti, calcolatori, dispositivi elettronici.

1. Le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = \left(\frac{\sqrt[10]{|7+i|}}{1+i\sqrt{3}} \right)^{10}$$

sono date da

$$\begin{aligned} \text{Ris.}: \quad \boxed{\text{A}} : \left\{ \frac{\sqrt[6]{50}}{2^{10/3}} e^{-\frac{10}{3}\pi i}, \frac{\sqrt[6]{50}}{2^{10/3}} e^{-\frac{4}{3}\pi i}, \frac{\sqrt[6]{50}}{2^{10/3}} e^{\frac{2}{3}\pi i} \right\} \quad \boxed{\text{B}} : \left\{ \frac{\sqrt[6]{50}}{2^{10/3}} e^{-\frac{10}{9}\pi i}, \frac{\sqrt[6]{50}}{2^{10/3}} e^{-\frac{4}{9}\pi i}, \frac{\sqrt[6]{50}}{2^{10/3}} e^{\frac{2}{9}\pi i} \right\} \\ \boxed{\text{C}} : \left\{ \sqrt[6]{50} e^{-\frac{10}{3}\pi i}, \sqrt[6]{50} e^{-\frac{4}{3}\pi i}, \sqrt[6]{50} e^{\frac{2}{3}\pi i} \right\} \quad \boxed{\text{D}} : \left\{ \sqrt[3]{50} e^{-\frac{10}{7}\pi i}, \sqrt[3]{50} e^{-\frac{4}{7}\pi i}, \sqrt[3]{50} e^{\frac{2}{7}\pi i} \right\} \end{aligned}$$

2. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x} - (1+x)^{\frac{\sin x}{x}}}{(1 - \cos(2x))(1 + \sin(7x))}$$

vale

$$\text{Ris.}: \quad \boxed{\text{A}} : \frac{1}{4} \quad \boxed{\text{B}} : 7 \quad \boxed{\text{C}} : -4 \quad \boxed{\text{D}} : -\frac{1}{7}$$

3. Siano $\alpha > 3$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(|x-2|^\alpha)}{(x-2)^3} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

Allora $f'(2)$ vale

$$\begin{aligned} \text{Ris.}: \quad \boxed{\text{A}} : 0 \text{ se } \alpha \geq 4, +\infty \text{ se } 3 < \alpha < 4 \quad \boxed{\text{B}} : 1 \text{ se } \alpha \geq 4, +\infty \text{ se } 3 < \alpha < 4 \quad \boxed{\text{C}} : +\infty \text{ se } \\ \alpha > 4, 2 \text{ se } \alpha = 4, 0 \text{ se } 3 < \alpha < 4 \quad \boxed{\text{D}} : 0 \text{ se } \alpha > 4, 1 \text{ se } \alpha = 4, +\infty \text{ se } 3 < \alpha < 4 \end{aligned}$$

4. Sia $\alpha > 0$. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1](n^{\frac{1}{n!+1}} + \alpha)}{n^{\frac{1}{3}} + \arctan(n! + 3)}$$

converge se e solo se

Risp.: ☐A : $\alpha > \frac{1}{3}$ ☐B : $\alpha > 2$ ☐C : $\alpha > \frac{2}{3}$ ☐D : $\alpha > \frac{3}{2}$

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x-y} \sin(e^x) \\ y(\ln \pi) = \ln 3. \end{cases}$$

Allora $y(1)$ vale

Risp.: ☐A : $\sin e$ ☐B : $\ln(\sin e + 3)$ ☐C : $\ln(e + 2)$ ☐D : $\ln(-\cos e + 2)$

6. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 + x^2 \ln x}$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ☐V ☐F

(b) $f'(1) = -\frac{1}{4}$ ☐V ☐F

(c) $x = e^{-\frac{1}{2}}$ è un punto di massimo ☐V ☐F

(d) f è iniettiva ☐V ☐F

(e) $Im f =]0, +\infty[$ ☐V ☐F
